원의 위상동형사상 군에서 자유 부분군과 TITS 대안

최인혁

Abstract. 본 논문에서는 위상적인 원의 자기위상동형사상 군 안에 자유 부분군이 존재하는지, 만약 존재한다면 그러한 부분군이 일반적(generic)인지 논한다. 먼저 Margulis가 증명하고 Ghys가 새로운 접근을 제시한 약한 위상적인 Tits 대안(Tits alternative)을 살펴본다. 그후 비축퇴(non-degenerate) 무작위 행보를 공부함에 있어 Tits 대안이 어떻게 사용되는지 알아본다. 이를 위해 Gouëzel이 최근 제시한 중추 회전 기법(pivoting technique)을 원의 자기위상동형사상 군에 알맞게 적용하는 방법을 고찰한다.
핵심 단어. 무작위 행보, 원의 위상동형사상 군, 동기화(synchronization), Tits 대안, Schottky 순서쌍
MSC classes: 20F67, 30F60, 57M60, 60G50

1. 서론

본 논문에서는 위상적인 원 S^1의 자기위상동형사상 군 Homeo(S^1) 안에서의 자유 부분군의 존재성 및 확률적인 일반성(genericity)을 살펴본다. 2절에서는 Étienne Ghys가 묻고 Gregory Margulis가 증명한 원의 위상동형사상 군에 대한 약한 위상적인 Tits 대안(Tits alternative)을 소개한다. 그말인즉 원의 위상동형사상으로 이루어진 임의의 군 G는 다음 중 정확히 하나를 만족한다는 것인데, (i) G의 모든 원소가 동시에 보존하는 원 위의 확률 측도가 존재하거나 혹은 (ii) G의 원소 두 개 f, g 및 서로 겹치지 않는 원의 열린 부분집합 U_1, U_2, V_1, V_2가 존재하여,

$$f\big(S^1 \setminus U_1\big) \subseteq U_2,\ f\big(S^1 \setminus U_2\big) \subseteq U_1,\ g\big(S^1 \setminus V_1\big) \subseteq V_2,\ g\big(S^1 \setminus V_2\big) \subseteq V_1$$

가 성립한다는 것이다. 이때 f, g의 순서쌍 (f, g)를 Schottky 순서쌍이라 부른다. 만약 G의 모든 원소가 동시에 고정하는 점이 존재하지 않고 G의 작용이 강하게 팽창적(strongly expansive)이라면 반드시 (ii)의 경우에 해당하며, 이때 상기한 열린 집합들 U_i, V_i는 모두 열린 구간(interval)으로 잡을 수 있다.

3절에서는 약한 위상적인 Tits 대안의 결과물로서 얻은 Schottky 순서쌍을 무작위 행보(random walk)에 활용하는 법을 다룬다. 이를 통해 다음 두 정리에 대한 새로운 증명을 제시한다:

(1) 자유 부분군의 일반성 (Martín Gilabert Vio): Homeo(S^1) 위의 무작위 행보 $(Z_n)_{n>0}$ 및 $(Z'_n)_{n>0}$를 독립적으로 생각하되, $(Z_n)_{n>0}$의 모든 가능한 궤적이 동시에 보존하는 원 위의 확률 측도가 존재하지 않고, $(Z'_n)_{n>0}$의 모든 가능한 궤적이 동시에 보존하는 원 위의 확률 측도가 존재하지 않는다고 가정하자. 그러면 0과 1 사이에 있는 상수 q가 존재하여, 충분히 큰 모든 n에 대해

$$\mathbb{P}\left(\text{두 위상동형사상 } Z_n\text{과 } Z'_n\text{은 차수 2인 Homeo}(S^1)\text{의 자유 부분군을 생성해 냄}\right) \geq 1 - q^n$$

이 성립한다.

(2) 무작위 행보의 지수함수적인 축약성 (Dominique Malicet): Homeo(S^1) 위의 무작위 행보 $(Z_n)_{n>0}$를 생각하되, $(Z_n)_{n>0}$의 모든 가능한 궤적이 동시에 보존하는 원 위의 확률 측도가 존재하지 않는다고 가정하자. 그러면 0과 1 사이에 있는 상수 q가 존재하여 다음이 성립한다.

Date: March 4, 2025.

원 위의 임의의 점 $x \in S^1$마다 그를 포함하는 열린 구간 $I_x \subseteq S^1$가 존재하여, 각 자연수 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$마다

$$\mathbb{P}\left(n\text{보다 큰 각각의 }k\text{에 대해 }\operatorname{diam}(I_x) \leq q^k\text{임}\right) \geq 1 - q^n$$

이 성립한다. 더 나아가, 원 위의 임의의 점 $x \in S^1$와 임의의 자연수 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$이 주어졌을 때,

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{Lebesgue 측도가 } 1-q^n \text{ 이상이면서 } x\text{를 포함하는 열린 집합 } E(x) \subseteq S^1\text{가 존재하여} \\ n\text{보다 큰 각각의 } k\text{에 대해 } Z_k \cdot E(x)\text{의 Lebesgue 측도가 } q^k \text{ 이하임}\end{array}\right) \geq 1 - q^n$$

이 성립한다.

위 명제는 Gilabert Vio 및 Malicet이 증명한 버전을 조금 더 강화한 것인데, 기존에는 주어진 사건의 확률이 n이 커짐에 따라 1로 수렴함을 증명한 한편, 여기서는 그 확률이 1에 수렴하는 속도가 지수함수적임을 논한다.

사건 나열의 확률이 0 혹은 1로 수렴함을 보이는 데 흔히 에르고딕 이론(ergodic theory)을 활용하는데, Gilabert Vio 및 Malicet 또한 그러한 접근을 택하고 있다. 다만, 에르고딕 이론적인 논법으로는 사건의 확률의 지수함수적인 감소를 곧바로 관찰하기 쉽지 않다. 본 논문에서는 최근 등거리사상 군 위의 무작위 행보 이론에서 큰 진전을 이끌어낸 Sébastien Gouëzel의 *방향 전환 기법*(*pivoting technique*)을 이용해 위 명제를 조합적으로 증명한다.

이를 위해 4절에서는 먼저 거리공간의 등거리사상 군에 대한 Gouëzel의 방향 전환 기법을 개괄한다. 그후, 등거리사상 군이 아닌 (어쩌면 그 대척점에 있다고 할 수 있는) 원의 위상동형사상 군에 방향 전환 기법을 어떻게 적용할지 고찰한다. 방향 전환 기법에서 따라 나오는 계산들은 꽤 구체적이기에, 무작위 행보를 생성해 내는 확률 측도를 조금 변형하더라도 위 명제들에서의 q값은 균일하게 유지할 수 있다. 이를 위해서는 확률 측도를 연속하게 변형시켰을 때 그 자기합성곱(self-convolution) 또한 연속하게 변한다는 결과가 필요한데, 이를 5절에 간단히 기록하겠다.

2. 원의 위상동형사상 (준)군 및 Margulis의 약한 Tits 대안

이 절에서는 Ghys가 질문하고 Margulis가 [Mar00]에서 증명한 Homeo(S^1) 위에서의 약한 Tits 대안(weak Tits alternative)를 살펴 본다. 이때, Homeo(S^1)의 부분군에 대한 명제와 부분 준군에 대한 명제가 약간 다르기에 구분해서 설명하겠다. Homeo(S^1)의 부분군에 대해서는 다음과 같은 정리가 알려져 있다.

정리 2.1. Homeo(S^1)*의 임의의 부분군* G*에 대해, 다음 중 정확히 한 가지가 성립한다.*

(1) G*의 모든 원소가 동시에 보존하는 원 위의 확률 측도가 존재한다.*

(2) 준켤레바꾸기(semiconjugation) 및 유한 차수 덮음(finite-degree covering)을 통해 원래 G*의 작용에 잘 들어맞는 또다른* G*의 작용을 건설할 수 있는데, 서로 겹치지 않는 원의 열린 구간에 결부된 Schottky 순서쌍을 이 새로운 작용으로부터 찾을 수 있다. 자세히 말하자면,*

- *단조증가성이고(monotone) 차수가 1인 원의 연속사상* $c : S^1 \to S^1$*,*
- *원의 자가 덮음 사상* $\pi : S^1 \to S^1$

이 존재하고, 또 군 맞춤 사상 $\rho : G \to \rho(G) \leq \text{Homeo}(S^1)$*이 존재하여, 각* $g \in G$*마다*

$$\pi \circ c \circ g = \rho(g) \circ \pi \circ c$$

가 성립하는 한편, $\rho(G)$의 원소 두 개 f, g 및 서로 겹치지 않는 원의 열린 구간 I_1, I_2, J_1, J_2 가 존재하여,

$$f\big(S^1 \setminus I_1\big) \subseteq I_2,\ f^{-1}\big(S^1 \setminus I_2\big) \subseteq I_1,\ g\big(S^1 \setminus J_1\big) \subseteq J_2,\ g^{-1}\big(S^1 \setminus J_2\big) \subseteq J_1,$$

가 성립한다.

정리 2.2. Homeo(S^1)*의 어떤 부분군 G가 원 위에서 근접적인(proximal) 작용을 가지면서 군 원소 전체가 동시에 보존하는 고정점을 가지지 않는다. 그러면 G는 열린 구간에 결부된 Schottky 순서쌍을 가지는즉, G의 원소 f, g 및 서로 겹치지 않는 원의 열린 구간 I_1, I_2, J_1, J_2가 존재하여,*

$$f\big(S^1 \setminus I_1\big) \subseteq I_2,\ f^{-1}\big(S^1 \setminus I_2\big) \subseteq I_1,\ g\big(S^1 \setminus J_1\big) \subseteq J_2,\ g^{-1}\big(S^1 \setminus J_2\big) \subseteq J_1,$$

가 성립한다.

위 정리들에서 기술하는 Schottky 순서쌍은 차수 2인 자유 부분군을 생성한다 (Margulis). 이는 흔히 탁구 보조정리(ping-pong lemma)라고 불리는 것이다.

이 정리들은 Margulis가 [Mar00]에서 처음으로 증명하고, Ghys가 [Ghy01]에서 다시 설명했다. 이 논문에서는 Margulis와 Ghys의 방법론을 큰 틀에서 따라가되, 세세한 부분을 조금 바꾸어 설명하려고 한다. 이는 즉, 컴팩트한 Lie 군의 Haar 측도 혹은 원의 위상동형사상의 회전수(rotation number)을 사용하지 않은 채, 다음 정리에서 얘기하는 π 및 c를 직접 빚어 내겠다는 뜻이다.

한편, Homeo(S^1)의 부분 준군에 대해서는 다음과 같은 명제가 성립한다.

정리 2.3. Homeo(S^1)*의 임의의 부분 준군 G에 대해, 다음 중 정확히 한 가지가 성립한다.*

(1) G의 모든 원소가 동시에 보존하는 원 위의 확률 측도가 존재한다.

(2) G는 열린 구간 유한 개의 합집합들에 결부된 Schottky 순서쌍을 가지는즉, 다음을 만족하는 S^1의 서로 겹치지 않는 열린 집합 U_1, U_2, V_1, V_2 및 G의 원소 두 개 f 및 g가 존재한다:

(a) U_1, U_2, V_1, V_2 각각은 열린 구간 유한 개의 합집합 형태이다.

(b)

$$f(S^1 \setminus U_1) \subseteq U_2, f^{-1}(S^1 \setminus U_2) \subseteq U_1, g(S^1 \setminus V_1) \subseteq V_2, g^{-1}(S^1 \setminus V_2) \subseteq V_1$$

가 성립한다.

정리 2.4. Homeo(S^1)*의 어떤 부분 준군 G가 원 위에서 근접적인(proximal) 작용을 가지면서 군 원소 전체가 동시에 보존하는 고정점을 가지지 않는다. 그러면 G는 열린 구간에 결부된 Schottky 순서쌍을 가지는즉, G의 원소 f, g 및 서로 겹치지 않는 원의 열린 구간 I_1, I_2, J_1, J_2가 존재하여,*

$$f\big(S^1 \setminus I_1\big) \subseteq I_2,\ f^{-1}\big(S^1 \setminus I_2\big) \subseteq I_1,\ g\big(S^1 \setminus J_1\big) \subseteq J_2,\ g^{-1}\big(S^1 \setminus J_2\big) \subseteq J_1,$$

가 성립한다.

이 정리들은 D. Malicet의 결과([Mal17, Theorem D, Theorem E])의 따름정리라고 볼 수 있는데, 여기서는 Malicet의 방법론을 따르지 않고, Margulis의 [Mar00] 논문의 방법론을 응용하여 증명하고자 한다.

2.1. **원의 위상동형사상** 위상공간 및 측도공간으로서, 원 S^1는 실수 집합 $\mathbb{R}$을 $\mathbb{Z} \simeq \langle z \mapsto z+1 \rangle$의 작용으로 자른 것이다. 이를 기록하는 사영(projection) $\Pi : \mathbb{R} \to S^1$을 기억하도록 하자.

원 S^1의 자기위상동형사상(self-homeomorphism)들은 자기들끼리 군을 이룬다. 이 군을 $\mathrm{Homeo}(S^1)$로 표기한다. $\mathrm{Homeo}(S^1)$은 매우 많은 부분군을 품고 있기에 어떤 군들이 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 부분군으로 나타날 수 있는지 물어볼 수 있다. 이를 위해 다음 개념을 정의하자. 어떤 군 G로부터 $\mathrm{Homeo}(S^1)$로 향하는 군 맞춤 사상 (group homomorphism) $\varphi : G \to \mathrm{Homeo}(S^1)$를 다른 말로 *$S^1$상의 작용(action)*이라고 부른다. 다시 말해, 어떤 군 G가 원 S^1에 작용한다는 것은, 군 맞춤 사상 $\varphi : G \to \mathrm{Homeo}(S^1)$를 하나 정한다는 것이다.

연속함수 $f : S^1 \to S^1$를 생각하자. 이때, $\Pi \circ \tilde{f} = f \circ \Pi$가 성립하게끔 하는 연속함수 $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 존재한다. 이때 $\tilde{f}$를 f의 $\mathbb{R}$로의 *끌어올림(lift)*이라고 부른다. f의 끌어올림 $\tilde{f}$는 유일하지는 않지만 $z \mapsto z+1$의 작용을 통해 모든 선택지 사이를 오갈 수 있다. 더욱이, $\tilde{f}(x+1) - \tilde{f}(x)$는 정수 값을 가지며, 그 값은 $\tilde{f}$의 선택지 혹은 $x \in \mathbb{R}$의 선택지에 의존하지 않는다. 이 정수 값을 f의 차수(degree)라고 부른다. 합성함수의 차수는 두 성분 함수의 차수의 곱이고, 이로써 원의 위상동형사상의 차수는 반드시 1 혹은 -1이어야 함을 알 수 있다. 또한, 차수가 1인 위상동형사상들의 집합은 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 지수 2짜리 부분군을 이루고, 이를 $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$로 표기한다. 차수가 1인 위상동형사상을 다른 말로 *방향 보존 위상동형사상*이라고 부르기도 한다.

한편, 주어진 연속함수 $f : S^1 \to S^1$에 대해, 그 끌어올림 $\tilde{f}$는 유일하지 않지만 끌어올림의 단조증가성, 단조감소성 및 단조성은 잘 정의된다. 이를 바탕으로 f의 단조증가/감소성 및 단조성을 정의한다.

2.2. **켤레바꾸기 및 준켤레바꾸기(conjugation and semiconjugation).** S^1을 위상공간으로 보면서 S^1의 위상동형사상 f의 위상적 동역학을 분석할 때, 이를테면 $f(x)$가 x보다 1/3바퀴 앞서 있는지를 묻는 것은 그다지 의미 있는 질문이 아니다. S^1의 각 점에 매겨진 좌표, 즉 거리 구조를 신경 쓰지 않기 때문이다. 다시 말해, f의 위상적 동역학을 공부하고 싶다면 S^1의 위상 구조를 보존하는 좌표 변환에 의해 좌우되지 않는 성질 혹은 불변량을 알아야 한다. 이에 다음 개념이 필요해진다.

정의 2.5. *두 위상동형사상 $f, g \in \mathrm{Homeo}(S^1)$가 서로의* 위상적 좌표변형(topological conjugate) *이라는 것은 어떤 위상동형사상 $h \in \mathrm{Homeo}(S^1)$가 존재하여 $h \circ f = g \circ h$가 성립한다는 것이다. 이때, $g = hfh^{-1}$을 f의 h에 의한 위상적 좌표변형이라고 한다. 다른 관점에서 보면, 위상동형사상 $h \in \mathrm{Homeo}(S^1)$가 주어질 때마다 $f \mapsto hfh^{-1}$라는 $\mathrm{Homeo}(S^1)$ 안의 자기사상이 정의되는데, 이 자기사상을 h에* 의한 켤레바꾸기(conjugation by h)*라고 부른다.*

마찬가지로, 어떤 군 Γ의 원에 대한 두 작용 $\Phi_1, \Phi_2 : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(S^1)$가 서로의 위상적 좌표변형 *이라는 것은, 어떤 위상동형사상 $h \in \mathrm{Homeo}(S^1)$가 존재하여 각 $g \in \Gamma$마다 $h \circ \Phi_1(g) = \Phi_2(g) \circ h$가 성립한다는 것이다.*

어떤 위상동형사상을 위상적으로 켤레바꾸더라도 (위상적) 동역학적인 성질은 하나도 잃지 않는다. 한편, 어떤 위상동형사상들은 원의 특정 부분에서는 복잡한 동역학을 보이고, 다른 부분에서는 재미없는 동역학을 보인다. 이때, 전자 영역을 그대로 남겨 복잡한 동역학적 정보는 살리면서 후자 영역은 각 연결성분을 한 점으로 압축해 자명한 정보는 무시하면 편리하다. 이러한 정보의 축약은 (위상동형사상 대신) 단조적이고 차수가 1인 연속사상이 담당하기에 다음 개념이 필요해진다.

정의 2.6. *두 위상동형사상 $f, g \in \mathrm{Homeo}(S^1)$에 대해, g가 f의* 준좌표변형(semiconjugate)*이라는 것은 단조적인 차수 1짜리 연속사상 $h : S^1 \to S^1$가 존재하여 $h \circ f = g \circ h$가 성립한다는 것이다.*

마찬가지로, 어떤 군 Γ의 원에 대한 두 작용 $\Phi_1, \Phi_2 : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(S^1)$가 준좌표변형이라는 것은, 단조적인 차수 1짜리 원의 연속사상 h가 존재하여 각 $g \in \Gamma$마다 $h \circ \Phi_1(g) = \Phi_2(g) \circ h$가 성립한다는 것이다.

명제 2.7. *$\mathrm{Homeo}(S^1)$의 임의의 부분군 G에 대해 다음 셋 중 정확히 하나가 성립한다.*

(1) 유한한 G-궤도가 존재한다. 즉, $\#\{gx : g \in G\} < +\infty$인 점 x을 원에서 잡을 수 있다.
(2) 모든 G-궤도가 원 안에서 조밀하다. 다시 말해, 그 어느 $x \in S^1$에 대해서도 $G \cdot x \subseteq S^1$의 닫음 (closure)이 원 전체다.
(3) G에 불변하는 (공집합이 아닌) 닫힌 부분집합 중 최소한이고, 무한집합이면서 원 전체가 아닌 $K \subsetneq S^1$이 존재한다.

(3)의 경우에는 G에 불변하는 (공집합이 아닌) 닫힌 부분집합 중 최소한인 K는 유일하고, Cantor 집합과 위상동형이며, 그 어느 G-궤도의 집적점 집합에도 포함된다. $(*)$

Proof. S^1의 부분집합에 대한 다음 성질을 먼저 정의하자. 먼저

$$\mathcal{S} := \{A \subseteq S^1 : A\text{는 공집합이 아닌 컴팩트 집합이면서 } G\text{에 불변함}\}$$

를 정의하자. 그러면 $\mathcal{S}$의 원소 간에는 집합 포함관계라는 부분순서(partial order)가 정의되어 있다. 이제, 어떤 $A \in \mathcal{S}$가 $\mathcal{S}$ 안에서 최소한(minimal)일 때, A가 *G-최소한이다*라고 하겠다. 이제 $x \in A$를 임의로 하나 뽑은 뒤, x의 G-궤도 $G \cdot x$를 생각하자. A가 G-불변이기에 $G \cdot x$는 A에 포함된다. 그러면 $G \cdot x$의 닫음 $\overline{G \cdot x}$ 역시 A의 부분집합이면서 G-불변이고, 닫혀 있기까지 하다. 이에 A의 최소성으로부터 $A = \overline{G \cdot x}$임이 따라나온다. 이 관찰을 요약하면 다음과 같다.

주장 2.8. *S^1의 부분집합 A가 G-최소한이라고 하자. 그러면 그 어느 $x \in A$에 대해서도, x의 G-궤도 $G \cdot x$의 닫음 $\overline{G \cdot x}$는 A와 일치한다.*

이제 원래 명제로 돌아가자. Zorn의 보조정리에 의해, G-최소한인 부분집합은 적어도 하나는 존재한다. 그중 하나를 K라고 이름붙이자. K의 집적점 집합

$$K' := \{x \in S^1 : \text{서로 다른 } k_1, k_2, \ldots\text{가 있어 } \lim_i k_i = x\text{가 성립함}\}$$

과 K의 경계 $\partial K := K \setminus \mathrm{int}\, K$는 각각 G-불변인 K의 닫힌 부분집합이 된다. 이때 다음 중 하나가 성립한다.

(a) $K' = \emptyset$: 이는 K가 유한집합이라는 뜻이다. 주장 2.8에 의해, 그 어느 $x \in K$에 대해서도 K는 x의 G-궤도 $G \cdot x$와 일치한다. 즉 (1)이 성립한다.
(b) $\partial K = \emptyset$: 이는 $K = S^1$을 의미하며, 주장 2.8에 의해, 그 어느 $x \in K = S^1$에 대해서도 K는 $G \cdot x$의 닫음 $\overline{G \cdot x}$와 일치한다. 즉 (2)가 성립한다.
(c) K'도 ∂K도 공집합이 아님: 이 경우 K는 무한집합이고 원 전체는 아니다. 즉 (3)이 성립한다.

한편 결론부의 (1)과 (2)가 양립할 수 없음은 분명하다. 따라서 [(a) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (a) 혹은 (c)] 및 [(b) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (b) 혹은 (c)]가 성립한다. 여기에 더해 [(3) $\Rightarrow$ $(*)$]를 증명하기만 하면,

$$[(c) \Rightarrow (3) \Rightarrow (*) \Rightarrow \text{임의의 } G\text{-최소한인 집합은 Cantor 집합} \Rightarrow \text{(a)도 (b)도 아님}]$$

임을 알 수 있어, [(a) $\Leftrightarrow$ (1)], [(b) $\Leftrightarrow$ (2)], [(c) $\Leftrightarrow$ (3)]을 완성하게 된다.

이제 [(3) $\Rightarrow$ $(*)$]을 완성하기 위해서는 다음을 관찰하면 된다.

주장 2.9. *S^1의 부분집합 A가 G-최소한이면서 무한집합이고 원 전체는 아니라고 하자. 그러면 A는 Cantor 집합과 위상동형이다. 그러면 임의의 $x \in S^1$에 대해, $G \cdot x$의 집적점 집합은 A를 포함한다.*

실제로, 주장 2.8 및 주장 2.9를 상정하고, K 및 K_1가 G-최소한임과 동시에 K가 조건 (c)를 만족한다고 가정하자. 그러면 (공집합이 아님을 이용해) K_1의 임의의 원소 x를 뽑으면 $G \cdot x$의 극점 집합은 K를 포함하는데, 이 극점 집합은 주장 2.8에 의해 K_1에 포함된다. 따라서 $K \subseteq K_1$이고, K_1의 최소성으로부터 $K = K_1$임을 이끌어낼 수 있다.

이제 주장 2.9를 증명하는 일만 남았다. 먼저, A가 무한집합이라는 것은 A'가 공집합이 아니라는 것이고, A가 원 전체가 아니라는 것은 ∂A가 공집합이 아니라는 것이다. A가 G-불변인 닫힌 집합이기에 이 두 집합 A' 및 ∂A는 A에 포함된 G-불변인 닫힌 집합이다. 그러면 A의 최소성으로부터 $A' = \partial A = A$임을 알 수 있다. 이는 곧 A가 Cantor 집합과 위상동형이라는 뜻이다.

이제 원 위의 임의의 점 x를 잡고 그 궤도 $G \cdot x$를 생각하자. 만약 $x \in A$라면 $\overline{G \cdot x}$는 A에 포함된 (공집합이 아닌) G-불변인 닫힌 집합이기에, A의 최소성으로부터 $\overline{G \cdot x} = A$임을 알 수 있다. 다음으로 x가 A 밖에 있다고 가정하자. 그러면 x는 $S^1 \setminus A$의 어떤 연결성분 $(a, b) \subseteq S^1$에 포함되어 있다. 이제 임의의 $y \in A$가 $G \cdot x$의 극점임을 결론짓기 위해서는, y의 임의의 근방 N에 대해 $N \cap (G \cdot x)$의 크기가 무한하다는 것만 보이면 된다.

여기서 A가 완벽집합(perfect set)이기 때문에 N은 무한히 많은 A의 원소를 가지고 있다. 임의의 자연수 k를 정하고, $A \cap N$의 원소 $2k+1$개를 뽑은 뒤 (근방 N 안에서 정의된 방향에 따라) 왼쪽부터 순서대로 $a_0, a_1, \ldots, a_{2k}$이라고 이름붙이자. 이제 각 $i = 1, \ldots, k$마다 주장 2.8에 의해 a_{2i-1}은 $G \cdot a$의 극점이고, 따라서 $g_i a \in (a_{2i-2}, a_{2i})$이게끔 하는 $g_i \in G$가 존재한다. 이때 $g_i(a, b)$는 한쪽 끝점이 $[a_{2i-2}, a_{2i}]$ 안에 위치하는 $S^1 \setminus A$의 연결성분이고, a_{2i-2} 및 a_{2i}는 $S^1 \setminus A$ 바깥에 있음을 주목하라. 이는 $g_i x \in (g_i a, g_i b) \subseteq (a_{2i-2}, a_{2i}) \subseteq N$을 의미한다. $(a_0, a_2), (a_2, a_4), \ldots, (a_{2k-2}, a_{2k})$는 서로 겹치지 않는 구간들이기에, $g_1 x, \ldots, g_k x$는 모두 서로 다른 x의 G-궤도 점들이다. 요약하자면, 임의의 자연수 k에 대해 $N \cap (G \cdot x)$의 크기는 k 이상이다. 다시 말해, $N \cap (G \cdot x)$의 크기는 무한하다. □

위 명제에서의 (2)의 경우에, 즉 G-궤도가 원 안에서 조밀할 때 G의 작용이 *최소한이다(minimal)*라고 한다. 최소한이 아닌 작용의 경우 G-궤도가 신경쓰는 영역, 즉 $\overline{G \cdot x}$만을 남기고 나머지를 정의역에서 삭제함으로써 최소한인 작용으로 환원할 수 있다는 점에서 이 용어의 의미가 드러난다. 다만, 이 과정은 $\overline{G \cdot x}$가 충분히 커서 여전히 원을 이룰 수 있을 때만 유용하다. 위 명제 속 (1)에서의 유한한 G-궤도는 원을 이루기에 너무 작지만, (3)에서의 Cantor set은 S^1로의 전사함수를 가지기에 상기한 전략을 적용할 수 있다. 위 명제에서의 (3)의 경우, G가 *예외적인 최소 집합 K를 가진다*고 말하기도 한다.

명제 2.10. *만약 $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$의 한 부분군 G가 예외적인 최소 집합을 가질 경우, 준켤레바꾸기를 통해 최소한인 작용으로 바꿀 수 있다. 다시 말해, G로부터 $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$의 다른 부분군 G'로 향하는 군 맞춤 사상 $\rho : G \to G'$ 및 단조적인 차수 1짜리 연속사상 $h : S^1 \to S^1$가 존재하여 $h \circ g = \rho(g) \circ h$가 성립한다.*

Proof. G의 예외적인 최소 집합을 K라고 하자. 그러면 $S^1 \setminus K$는 가산 개의 서로 겹치지 않는 열린 구간으로 이루어져 있는데, 각각의 열린 구간의 닫음을 한 점으로 묶어 내면 그 몫공간(quotient space)은 여전히 위상적인 원이 된다. 다시 말해, $S^1 \setminus K$의 각 연결 성분 및 그 양 끝점을 한 점으로 축약시키는 단조적인 연속 함수 $h : S^1 \to S^1$가 존재한다는 것이다. (K가 이를테면 표준적인 Cantor 집합이라면 h는 Cantor 3진 함수로 구현할 수 있다.) 이때 임의의 $y \in S^1$에 대해 $h^{-1}(y)$는 $S^1 \setminus K$의 한 연결 성분의

닫음이거나 혹은 한 점이다. 즉 $h^{-1}(y)$는 어떠한 경우에도 연결된 부분집합이고, h의 차수는 ± 1임을 알 수 있다. 여기서 치역인 원에 적절한 방향을 줌으로써 h의 차수가 1이게 할 수 있다.

이제 각 $g \in G$에 대해 $\rho(g)$를 구성해 보자. 임의의 점 $y \in S^1$에 대해, $h^{-1}(y)$는 $S^1 \setminus K$의 한 연결성분의 닫음이거나 혹은 한 점이다. g는 최소 집합인 K를 보존하기에, $S^1 \setminus K$의 연결성분을 연결성분으로 보낸다. 따라서, $g(h^{-1}(y))$는 여전히 $S^1 \setminus K$의 한 연결성분의 닫음이거나 혹은 한 점이고, 따라서 h를 취하면 한 점으로 묶여 나온다. 이 덕분에, y의 $\rho(g)$에 의한 함숫값을 $\big(\rho(g)\big)(y) := (h \circ g)(h^{-1}(y))$로 잘 정의할 수 있다. 주어진 g에 대해, $f \circ h = h \circ g$를 만족하는 함수 $f : S^1 \to S^1$는 상술한 $\varphi(g)$밖에 없다 (†).

이렇게 정의한 $\rho(g)$가 연속일 충분조건은 임의의 열린 구간 U의 역상 $V := (\rho(g))^{-1}(U)$가 열린 구간이라는 것이다. 여기서 $h \circ g$가 단조적인 연속함수이기에 $h^{-1}(V) = (h \circ g)^{-1}(U)$는 열린 구간인데, 그 끝점들은 $\overline{S^1 \setminus K}$ 안에 위치할 수는 없다 $(*)$. 실제로, 만약 예를 들어 $h^{-1}(V)$가 $S^1 \setminus K$의 어떤 연결성분 I와 조금이라도 겹친다면, 모든 $x \in \bar{I}$에 대해 $h(x)$는 동일하고 이 값이 V에 들어간다. 따라서 $h^{-1}(V)$는 $\bar{I}$ 전체를 포함하고, $h^{-1}(V)$의 왼쪽 끝점도 오른쪽 끝점도 $\bar{I}$ 바깥에 형성된다. $(*)$를 만족하는 열린 구간의 h-이미지는 마찬가지로 열린 구간이기에 증명이 끝난다.

마지막으로, ρ가 G의 연산과 잘 어울리는지를 확인하자. 정의로부터

$$h \circ g_1 \circ g_2 = \rho(g_1) \circ h \circ \rho(g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2) \circ h$$

임을 관찰할 수 있고, 성질 (†)로부터 $\rho(g_1)\rho(g_2) = \rho(g_1 g_2)$을 이끌어낼 수 있다. 특히, $\rho(id) = id$임을 알기에 각 $g \in G$마다 $\rho(g)\rho(g^{-1}) = \rho(g^{-1})\rho(g) = id$가 성립한다. 연속인 역함수를 가지는 연속함수인 $\rho(g)$는 S^1의 자기위상동형사상이어야만 한다. 이로써 증명이 끝난다. □

2.3. **팽창성(Expansivity) 혹은 근접성(Proximality).** 이 절에서는 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 부분군에 대한 동역학적인 특성을 하나 정의하고, $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 부분군이 만족할 수 있는 이분법적인 상황을 기술할 것이다. 이는 정리 2.1을 위한 예비적인 단계로 볼 수 있다.

정의에 앞서 $\mathrm{Homeo}(S^1)$ 안에 있는 부분군 두 개를 살펴보겠다. 이 논의에서 원 S^1을 복소평면 $\mathbb{C}$ 안의 단위원 $\{z : |z| = 1\}$과 동일시하겠다. 이 원은 Poincaré 계량이 얹어진 원판 $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$의 가장자리로 볼 수 있으며, $\mathbf{D}$의 등거리사상 군

$$\mathrm{PSU}(1,1) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C},\, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$$

은 자연히 S^1에 작용한다. 즉 $\mathrm{PSL}(1,1)$을 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 부분군으로 간주할 수 있다.

$\mathrm{PSU}(1,1)$ 안에는 원점 기준 회전 $\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$들이 살고 있다. 이 회전들의 집합 $\mathcal{R}$은 더 작은 부분군을 이루며, S^1 위의 호 길이를 보존한다. 즉 원점 기준 각도를 이용해 S^1 위에 거리 구조 d 혹은 길이 측도 μ를 구성하면, $\mathcal{R}$은 (S^1, d)의 등거리사상 군이 되고 또 (S^1, μ)라는 확률 공간의 측도 보존사상 군이 된다. 이렇게 S^1상의 어떤 확률 측도 혹은 거리 구조를 보존하는 부분군이 $\mathcal{R}$만 있는 것은 아니다. 예를 들면, 원점 $\mathbf{0}$을 다른 점 $p \in \mathbf{D}$로 옮기는 행렬 $M_p \in \mathrm{PSU}(1,1)$을 생각하면, M_p에 의한 $\mathcal{R}$의 켤레바꿈(conjugate) $\mathcal{R}_p := M_p \mathcal{R} M_p^{-1}$은 이제 $M_p^* d$ 및 $M_p^* \mu$라는 새로운 거리 구조 및 확률 측도를 보존하는 군이 된다. 비록 $M_p^* d$와 d가 다른 거리 구조이기는 하지만 상수배 동치 관계에 있다. 즉 $C^{-1} d \le M_p^* d \le C d$이 성립하게끔 하는 양수 C가 존재한다. 따라서 $\mathcal{R}_p$는 비록 d를 보존하지는 않으나 심각하게 뒤틀 수는 없다. 다시 말하자면, $\mathcal{R}_p$의 원소들은 (S^1, d) 위에서 *균일연속하다 (equicontinuous)*.

한편, $\mathbb{D}$는 곡률이 -4인 쌍곡 곡면들의 보편적 덮개 공간(universal covering space)이기도 하다. 따라서 $\mathrm{PSU}(1,1)$ 안의 이산 군(discrete group)들 $\mathbb{D}$에 어떻게 작용하는지를 보는 것이 중요한데, 이러한 군들을 *Fuchsian* 군이라고 부른다. 이제 유한한 넓이를 가지는 쌍곡 곡면을 하나 생각하자. 이 곡면은 $\mathbb{D}$를 어떤 Fuchsian 군 $G \leq \mathrm{PSU}(1,1)$로 잘라낸 것인데, 이 G에는 반드시 균일연속성을 해치는 원소가 존재한다. 구체적으로, G의 원소인 행렬 $f \in G$ 및 S^1 위의 서로 다른 점 x 및 y가 존재하여, $S^1 \setminus y$ 안의 임의의 컴팩트 집합 K에 대해 $\lim_{i\to+\infty} \mathrm{diam}(y \cup f^i K) = 0$이 성립하고, $S^1 \setminus x$ 안의 임의의 컴팩트 집합 K에 대해 $\lim_{i\to+\infty} \mathrm{diam}(x \cup f^{-i} K) = 0$이 성립한다. 이러한 G의 원소를 쌍곡행렬(hyperbolic matrix) 혹은 쌍곡적인 원소(hyperbolic element)라고 부른다. 또, x를 f의 작용에 대한 밀개(repeller), y를 끌개(attractor)라고 부른다. 이 두 점은 정확히 f의 작용에 대한 S^1 상의 고정점(fixed point theorem)이다.

실은, G에는 본질적으로 다른 쌍곡적인 원소가 수없이 많이 존재한다. 구체적으로, f의 작용에 대한 밀개 x 및 끌개 y, 그리고 g의 작용에 대한 밀개 x' 및 끌개 y' 네 점이 모두 서로 다르게끔 G의 원소 두 개 $f, g \in G$를 찾을 수 있다. 이 경우, x, y, x', y'를 각각 포함하는 충분히 작은 열린 구간들 I_1, I_2, J_1, J_2를 잡으면 이들 열린 구간들 또한 서로 겹치지 않는다. 또한 f 및 g의 동역학이 쌍곡적이기에 충분히 큰 N에 대해

$$f^N\big(S^1 \setminus I_1\big) \subseteq I_2,\ f^{-N}\big(S^1 \setminus I_2\big) \subseteq I_1,$$
$$g^N\big(S^1 \setminus J_1\big) \subseteq J_2,\ g^{-N}\big(S^1 \setminus J_2\big) \subseteq J_1$$

가 성립한다. 이는 곧 정리 2.1에서 얻고자 했던 결론 중 한 경우인데, 우리 논증에서 중요한 역할을 하는 상황이기에 이름을 따로 붙이겠다.

정의 2.11. *원의 자기위상동형사상 f와 g를 생각하자. 만약*

$$f\big(S^1 \setminus U_1\big) \subseteq U_2,\ \ f\big(S^1 \setminus U_2\big) \subseteq U_1,\ \ g\big(S^1 \setminus V_1\big) \subseteq V_2,\ \ g\big(S^1 \setminus V_2\big) \subseteq V_1$$

를 만족하는 서로 겹치지 않는 원의 열린 부분집합 U_1, U_2, V_1, V_2가 존재한다면, f와 g의 순서쌍 (f, g)를 (U_1, U_2, V_1, V_2에 결부된) Schottky 순서쌍*이라고 부른다.*

위 두 예시에서 대조되는 동역학은 일반적인 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 부분군에서도 관찰된다는 것이 바로 정리 2.1의 주제다. 이제 정리 2.1을 몇 단계에 걸쳐 증명하겠다. 먼저 정리 2.1의 두 결론이 양립할 수 없음을 관찰하자.

보조정리 2.12. $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 부분군 G가 원 위의 어떤 확률 측도를 보존한다고 하자. 그러면 G 안에는 Schottky 순서쌍이 존재할 수 없다. 특히, G는 정리 2.1의 (2)의 경우에 해당할 수 없다.*

Proof. G가 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 부분군이라고 하자. 만약 G가 정리 2.1의 (2)의 경우에 해당한다면 G는 Schottky 순서쌍을 가진다는 것을 보이자. 이를 위해 어떤 덮음 사상 c, 준켤레바꾸기 π, 군 맞춤 사상 ρ 및 열린 구간 I_i, J_i에 결부된 $\rho(G)$ 안의 Schottky 순서쌍 (f, g)을 통해 G가 정리 2.1의 (2)의 결론을 만족한다고 가정하고, $\rho(\mathfrak{f}) = f$, $\rho(\mathfrak{g}) = g$인 두 원소 $f, g \in G$를 잡자. 그러면

$$\mathfrak{f}\big(S^1 \setminus (\pi\circ c)^{-1}(I_1)\big) = (\pi\circ c)^{-1}\Big(f\big(S^1 \setminus I_1\big)\Big) \subseteq (\pi\circ c)^{-1}(I_2)$$

가 성립한다. 비슷한 이유로

$$\mathfrak{f}\big(S^1\setminus(\pi\circ c)^{-1}(I_2)\big) \subseteq (\pi\circ c)^{-1}(I_1),\ \mathfrak{g}\big(S^1\setminus(\pi\circ c)^{-1}(I_1)\big) \subseteq (\pi\circ c)^{-1}(I_2),\ \mathfrak{g}\big(S^1\setminus(\pi\circ c)^{-1}(I_2)\big) \subseteq (\pi\circ c)^{-1}(I_1)$$

를 관찰할 수 있다. 또 I_1, I_2, J_1, J_2가 서로 겹치지 않는 열린 구간이니 (연속사상인) $\pi \circ c$로 이들의 역상을 취하면 서로 겹치지 않는 열린 집합이 된다. 이로써 $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$가 G 안의 Schottky 순서쌍임을 알 수 있다.

이제, 서로 겹치지 않는 열린 집합 U_1, U_2, V_1, V_2에 결부된 Schottky 순서쌍 (f, g)가 주어졌을 때, f와 g가 동시에 보존하는 확률 측도가 없다는 것만 보이면 된다. 이를 위해, f 및 g가 어떤 유한 측도 μ를 동시에 보존한다고 가정하자. 이때, $\{f^i\big(S^1 \setminus (U_1 \cup U_2)\big) : i \in \mathbb{Z}\}$는 서로 겹치지 않는 집합들의 모임임을 관찰할 수 있다. 이는

$$U_2 \supseteq f\big(S^1 \setminus U_1\big) \supseteq f(U_2) \supseteq f^2\big(S^1 \setminus U_1\big) \supseteq \ldots f^i(U_2) \supseteq f^{i+1}\big(S^1 \setminus U_1\big) \supseteq f^{i+1}(U_2) \supseteq \ldots$$

라는 포함관계로부터 따라나온다. f가 μ를 보존하므로 ${}^i\big(S^1 \setminus (U_1 \cup U_2)\big)$에 모두 같은 μ값을 부여하는데, 이 집합들이 서로 겹치지 않으므로

$$\mu\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i\big(S^1 \setminus (U_1 \cup U_2)\big)\Big) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu\Big(f^i\big(S^1 \setminus (U_1 \cup U_2)\big)\Big) = \infty \cdot \mu\big(S^1 \setminus (U_1 \cup U_2)\big)$$

가 성립한다. μ가 유한 측도이므로, $S^1 \setminus (U_1 \cup U_2)$의 μ값이 0일 수밖에 없다.

마찬가지 이유로, g와 집합 $S^1 \setminus (V_1 \cup V_2)$ 사이 관계를 생각하면 $\mu(S^1 \setminus (V_1 \cup V_2) = 0$을 관찰할 수 있다. 이제 $S^1 = (S^1 \setminus (U_1 \cup U_2)) \cup (S^1 \setminus (V_1 \cup V_2))$임을 이용하면 $\mu(S^1)$ 또한 0임을 알 수 있다. 즉, f와 g 둘 다에 의해 보존되는 유한 측도는 영측도밖에 없고, 확률 측도는 보존될 수 없다. 이로써 증명이 끝난다. □

이제 정리 2.1의 이분법적인 상황을 기술하기 위한 개념을 하나 정의하겠다.

정의 2.13. *$\mathrm{Homeo}(S^1)$의 부분군 G가 주어졌을 때, 만약 원의 각 점 $x \in S^1$마다 그를 포함하는 열린 구간 $I_x \subsetneq S^1$이 존재해 $\{\mathrm{diam}(gI_x) : g \in G\}$의 최대 하한이 0이 된다면, G의 작용이* 팽창적 (expansive)*이라고 부른다. 만약 임의의 닫힌 구간 $I \subsetneq S^1$에 대해 $\inf_{g \in G} \mathrm{diam}(gI) = 0$가 성립한다면, G의 작용이* 강하게 팽창적(strongly expansive)*이라고 부른다.*

이것과 연관된 개념으로 *근접성(proximality)*가 있다. $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 어떤 부분군 G의 작용이 근접적(proximal)이라는 것은, 임의의 $x, y \in S^1$에 대해 $\inf_{g \in G} d(gx, gy) = 0$이라는 뜻이다. G의 작용이 강하게 팽창적이라면 반드시 근접적이어야 함은 쉽게 관찰할 수 있다. G의 작용이 최소한이라는 가정 하에, 그 역 또한 성립함을 곧 관찰할 것이다.

보조정리 2.14. *원 위의 최소한인 작용은 팽창적이거나 혹은 균일연속하다.*

Proof. $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 부분군 G를 하나 생각하고, G의 작용이 최소한이지만 균일연속하지 않다고 가정하자. 두번째 조건은 다시말해 어떤 $\epsilon > 0$ 및 $x_n, y_n \in S^1$, $g_n \in G$가 존재해 $\lim_{n \to 0} d(x_n, y_n) = 0$ 및 $d(g_n x_n, g_n y_n) > \epsilon$이 성립한다는 뜻이다. 여기서 x_n과 y_n을 양 끝점으로 가지는 원 위의 구간은 두 개가 있는데, 그중 크기가 더 작은 것을 I_n이라고 부르자. 이는 $\lim_{n \to 0} \mathrm{diam}(I_n) = 0$임을 보장한다. $g_n I_n$의 중점을 c_n이라고 부르겠다.

원은 컴팩트하므로, $(x_n)_{n>0}$, $(y_n)_{n>0}$ 및 $(g_n)_{n>0}$을 어떤 부분나열로 대신함으로써 $(g_n x_n)_{n>0}$, $(g_n y_n)_{n>0}$ 및 $(g_n c_n)_{n>0}$가 각각 원 위의 어떤 점 a, b 및 c로 수렴한다는 것을 보장할 수 있다. 이때 $d(a, b) = \lim_n d(g_n x_n, g_n y_n) > \epsilon$임을 관찰할 수 있다.

이제 c를 중점으로 하는 길이 $\frac{1}{10} d(a, b)$짜리 구간 I를 생각하자. 그러면 충분히 큰 n에 대해 다음이 성립한다.

(1) $d(c, g_n c_n) < \frac{1}{100} d(a, b) \leq \mathrm{diam}(I)/2$이므로 $g_n c_n$은 I에 포함된다.

(2) $d(g_n x_n, c) > d(a,c) - d(a, g_n x_n) > 0.4 d(a,b)$이므로 $g_n x_n$은 I 바깥에 있다. 마찬가지로, $g_n y_n$은 I 바깥에 있다.

즉, I는 $S^1 \setminus \{g_n x_n, g_n y_n\}$를 이루는 두 열린 구간 중 $g_n c_n$을 포함하는 구간인 $g_n I_n$에 포함되어 있다. 이는 곧

$$g_n^{-1} I \subseteq g_n^{-1}(g_n I_n) = I_n, \quad \lim_{n \to 0} \mathrm{diam}(g_n^{-1} I) = 0$$

이라는 사실로 이어진다.

이제 임의의 점 $x \in S^1$을 생각하자. G의 작용이 최소한이라고 가정했으므로 $d(gx, c) < \frac{1}{10} d(a,b)$, 즉 $gx \in I$이게끔 하는 $g \in G$가 존재한다. 이 경우 $g^{-1}I$는 x의 근방인 열린 구간이면서 $\lim_{n\to 0} \mathrm{diam}(g_n^{-1} g \cdot (g^{-1} I)) = 0$을 만족한다. 각각의 $x \in S^1$에 대해 이러한 열린 구간을 잡아줄 수 있으므로, G의 작용은 팽창적이라고 할 수 있다. □

이제 S^1 안의 구간을 생각할 때 방향이 중요해지므로 다음을 상기하도록 하자. 먼저, 사영 $\Pi : \mathbb{R} \to S^1$을 고정했다는 사실을 기억하자. S^1 위의 구간이란 원 전체가 아닌 연결된 부분집합을 뜻한다. 원 위의 닫힌 구간을 만들기 위해서는, 차이가 1보다 작은 두 실수 $a < b$를 고정한 뒤, (a, b)를 사영하면 된다. 이때, $\Pi(a)$를 $\Pi([a,b])$의 *왼쪽 끝점*, $\Pi(b)$를 $\Pi([a,b])$의 *오른쪽 끝점*이라고 부른다. 그리고 $\Pi([a,b])$를 편의상 $[\Pi(a), \Pi(b)]$로 나타내겠다. 물론 원 위의 특정 닫힌 구간 I를 사영으로 가지는 $\mathbb{R}$ 위의 닫힌 구간 $[a,b]$는 수없이 많지만, 그 $[a,b]$의 선택지와 무관하게 I의 왼쪽 끝점 및 오른쪽 끝점은 일관성 있게 정의된다. 마찬가지로 열린 구간 및 반열림 구간의 왼쪽/오른쪽 끝점들을 정의한다. 그러면 다음을 관찰할 수 있다:

사실 2.15. $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 원소* g*에 대해 다음 조건들은 동치이다:*

(1) g*는 방향 보존 위상동형사상이다.*

(2) 원 위의 임의의 구간 I*에 대해* gI*의 왼쪽 끝점은* $g \cdot (I$*의 왼쪽 끝점*$)$*이다.*

(3) 원 위에 (점이 아닌) 어떤 구간 I*가 존재해,* gI*의 왼쪽 끝점은* $g \cdot (I$*의 왼쪽 끝점*$)$*이다.*

$\mathrm{Homeo}(S^1)$의 임의의 부분군 G를 다룰 때 방향 보존 위상동형사상들로 이루어진 그 부분군 $G \cap \mathrm{Homeo}(S^1)$에 먼저 집중하면 편할 때가 있다. 이 과정에서 동역학적인 특성을 그다지 잃지 않는다는 것을 다음 보조정리를 통해 알 수 있다.

보조정리 2.16. $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 한 부분군* G*이 주어졌을 때,* G*가 명제 2.7의 특정 결론에 해당할 필요충분조건은* $G \cap \mathrm{Homeo}(S^1)$*가 그 결론에 해당하는 것이다. 다시 말해, 유한한* G*-궤도가 존재할 필요충분조건은 유한한* $G \cap \mathrm{Homeo}(S^1)$*-궤도가 존재한다는 것이고, 모든* G*-궤도가 원 안에서 조밀할 필요충분조건은 모든* $G \cap \mathrm{Homeo}(S^1)$*-궤도가 원 안에서 조밀하다는 것이며,* G*-불변인 공집합이 아닌 닫힌 부분집합 중 최소한인 Cantor 집합이 존재할 필요충분조건은* $G \cap \mathrm{Homeo}(S^1)$*-불변인 공집합이 아닌 닫힌 부분집합 중 최소한인 Cantor 집합이 존재한다는 것이다.*

Proof. 편의상 $G_+ := G \cap \mathrm{Homeo}(S^1)$로 표기하겠다. 또 편의상, 비어 있지 않은 G-불변인 닫힌 집합 중 포함 관계상 최소한인 집합을 G-최소한이라고 부르겠다.

$G = G_+$인 경우에는 명제가 당연하므로 $G \setminus \mathrm{Homeo}(S^1)$가 어떤 원소 r을 가지고 있을 때만 다루면 된다. 이때 G_+는 G의 지수 2짜리 정규 부분군이 되며, G는 $G_+ \cup rG_+ = G_+ \cup G_+ r$의 형태가 된다.

먼저 유한한 G_+-궤도가 존재한다고 가정해 보자. 다시 말해, $G_+ \cdot y$가 유한집합이 되게끔 하는 $y \in S^1$이 존재한다는 뜻이다. 이 경우, $G \cdot y = G_+ y \cup r G_+ y$ 또한 유한집합이 되어, G 또한 명제 2.7의 결론 (1)을 만족한다. 역으로, 어떤 점의 G-궤도가 유한하면 G_+-궤도는 그것보다 클 수 없으니 역시 유한하다.

이제 G_+-최소한인 Cantor 집합 K가 존재한다고 하자. 명제 2.7에 의하면 G_+는 결론 (1)에 해당할 수 없으므로, 그 어느 유한 집합도 보존할 수 없다. 그러니 G 또한 그 어느 유한집합도 보존할 수 없다. $(*)$ 한편, K 및 rK는 내부(interior)가 공집합인 Cantor 집합들이므로 그 합집합 또한 내부가 비어 있다. 다시 말해, $K \cup rK$는 원 전체가 아닌 컴팩트 집합이다. 또 G_+의 각 원소는 K는 물론, rK 또한 보존한다. 이는 임의의 $g \in G_+$에 대해 $r^{-1}gr$ 또한 G_+의 원소이므로

$$g(rK) = r \cdot (r^{-1}gr) \cdot K = rK$$

이기 때문이다. 한편, r은 K를 rK로 보내고 rK를 $r^2K = K$로 보내기에, $K \cup rK$를 보존한다. 이를 고려했을 때, G-최소한인 부분집합 K'를 하나 잡으면 K'는 결코 원 전체일 수 없고, $(*)$ 때문에 유한집합일 수도 없다. 따라서 K'는 무한집합이면서 원 전체가 아닌 집합이다. 즉, G는 명제 2.7의 결론 (3)을 만족한다.

역으로, 만약 G-최소한인 Cantor 집합 K가 존재하면, G_+ 또한 이를 보존하기에 G_+는 명제 2.7의 결론 (2)를 만족할 수 없다. 다시 말해, G_+는 유한한 궤도를 가지거나 혹은 명제 2.7의 결론 (3)을 만족해야 한다. 하지만 G_+가 유한한 궤도를 가지면 G 또한 그러하다는 것을 관찰했으니, G가 명제 2.7의 결론 (3)을 만족한다는 가정에 모순이다. 따라서 G_+는 명제 2.7의 결론 (3)을 만족해야 한다. 이로써 [(G_+가 명제 2.7의 결론 (3)을 만족) $\Leftrightarrow$ (G가 명제 2.7의 결론 (3)을 만족)]이 증명되었다. $\square$

다음으로, 균일연속한 작용에 대해 다음 사실이 성립한다.

보조정리 2.17. Homeo(S^1)*의 어떤 부분군* G*의 작용이 최소한이면서 균일연속하다고 하자. 그러면* G*는 켤레바꾸기를 통해 원 위의 Lebesgue 측도를 보존하는 군으로 나타낼 수 있다. 즉, 켤레바꾸기를 통해,* G*를 원의 회전(rotation) 및 지름에 대한 반전들(reflection)로 이루어진 군으로 변환할 수 있다.*

Proof. 증명을 위해, 최소한이고 균일연속한 작용을 보이는 원의 자기위상동형사상 군 G를 고정하겠다. 편의상 $G \cap \mathrm{Homeo}_+(S^1)$를 G_+로 나타내겠다. 그러면 자연히 G_+의 작용도 균일연속하다. 또한 보조정리 2.16에 의해 G_+의 작용은 최소한이기도 하다. 다시 말해,

(2.1) 임의의 $x, y \in S^1$에 대해, $\lim_{n\to\infty} g_n x = y$이게끔 하는 G_+의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$이 존재한다.

G의 작용이 균일연속이므로, 각 $\epsilon > 0$마다 $0 < \delta = \delta(\epsilon) < \epsilon$이 존재하여, 임의의 $g \in G$ 및 $\mathrm{diam}(I) < \delta$인 임의의 구간 I에 대해 $\mathrm{diam}(gI) < \epsilon$이 성립한다. 이제 다음을 살펴보자.

주장 2.18. *원 위의 임의의 두 점* $x, y \in S^1$*, 임의의 양수* $\epsilon > 0$ *및 임의의 방향 보존 위상동형사상* $g \in G_+$*에 대해,*

$$d(x, gx) < \delta(\epsilon) \Rightarrow d(y, gy) < 2\epsilon,$$

이 성립한다.

주장 2.18의 증명 x와 gx를 두 끝점으로 가지는 닫힌 구간 중 크기가 δ 이하인 것을 I라고 하자. 이때 $I = [x, gx]$, 즉 x가 I의 왼쪽 끝점인 경우만 다루면 충분하다. 그렇지 않은 경우 $I' = [gx, gy]$ 및 $g^{-1} \in G \cap \mathrm{Homeo}_+(S^1)$에 대해 살펴보면 되기 때문이다.

이제 다음을 관찰하자.

(1) 각 $i \geq 0$에 대해, $\mathrm{diam}(I) < \delta$이고 $g^i \in G_+$이므로 $\mathrm{diam}(g^i I) < \epsilon$이다.
(2) 각 $i > 0$에 대해 $g^{i-1}I$의 오른쪽 끝점과 $g^i I$의 왼쪽 끝점은 $g^i x$로 동일하다.

이제 $\mathcal{A} := \{i \geq 0 : g^i I \subseteq [x, y]\}$로 두면 다음 두 가능성이 생긴다.

(1) $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$: 이 경우, $x, g^1x, g^2x, \ldots$는 $[x, y]$ 위에 순서대로 왼쪽에서 오른쪽으로 놓여 있다. 이들의 극한점 c를 잡으면 $x, gx, g^2x, \ldots$는 왼쪽으로부터 c로 점점 다가오며, $d(g^i x, c) \searrow 0$가 성립한다. 따라서 $d(g^i x, g^{i+1}x)$의 극한도 0이다. 이 말은 곧, 제아무리 작은 $\eta > 0$에 대해서도 $d(g^i x, g^{i+1}x) < \eta$, $d(g^{-i} \cdot g^i x, g^{-i} \cdot g^{i+1}x) = d(x, gx)$를 만족하는 i가 존재한다는 뜻인데, 이는 $\{g^j : j \in \mathbb{Z}\} \subseteq G$의 균일연속성에 위배된다.

(2) $\mathcal{A}$에 속하지 않는 양의 정수가 존재하는 경우: 그러한 양의 정수 중 가장 작은 것을 N이라고 두면, y는 $[g^N x, g^{N+1}x]$에 속하게 된다. 이는 곧 $gy \in [g^{N+1}x, g^{N+2}x]$를 의미하기도 한다. 이 두 구간은 $g^{N+1}x$라는 공통점을 가지는 한편 둘 다 ϵ보다 크기가 작으므로,

$$d(y, gy) < \operatorname{diam}\left([g^N x, g^{N+1}x]\right) + \operatorname{diam}\left([g^{N+1}x, g^{N+2}x]\right) < 2\epsilon$$

라는 결론을 얻는다. □

거의 같은 증명을 통해 다음 결과도 관찰할 수 있다.

주장 2.19. *원 위의 임의의 구간 $J \subseteq S^1$ 및 G의 임의의 원소 $g \in G$에 대해,*

$$gJ \subseteq J \;\Rightarrow\; gJ = J$$

가 성립한다.

주장 2.19의 증명.. 먼저, g가 방향 보존성일 때만 증명하면 된다는 것을 관찰하자. 실제로, 일반적인 $g \in G$에 대해 $gJ \subseteq J$가 성립하면 $g^2J \subseteq gJ \subseteq J$ 또한 성립한다. 이제 방향 보존성인 g^2에 대해 명제를 적용하면 $g^2J = J$를 이끌어낼 수 있고, 이는 곧 $g^2J = gJ = J$임을 의미한다. 또, J가 닫힌 구간일때만 증명해도 충분하다.

이제 증명을 위해 g가 방향 보존성이면서 $gJ \subseteq J$임을 가정하자. 이로부터 gJ와 J의 왼쪽 끝점 및 오른쪽 끝점이 쌍마다 일치한다는 것을 보이기만 하면 된다. 귀류법을 적용하기 위해, gJ의 왼쪽 끝점이 J의 왼쪽 끝점과 일치하지 않는다고 가정해 보자. $J = [x, y]$로 표기하면, 이는 $d(x, gx) > 0$임을 의미한다. 또한 $I := [x, gx]$는 J에 포함되어 있다. 이제, 각 $i > 0$에 대해 $g^i I \subseteq g^i J \subseteq g^{i-1}J \subseteq \ldots \subseteq J$가 성립하고, $g^{i-1}I$의 오른쪽 끝점과 $g^i I$의 왼쪽 끝점은 $g^i x$로 동일하다. 그말인즉, $x, gx, g^2x, \ldots$는 J 위에 순서대로 왼쪽에서 오른쪽으로 놓여 있다. 이들의 극한점 c를 잡으면 $x, gx, g^2x, \ldots$는 왼쪽으로부터 c로 점점 다가오며, $d(g^i x, c) \searrow 0$가 성립한다. 따라서 $d(g^i x, g^{i+1}x)$의 극한도 0이다. 이 말은 곧, 제아무리 작은 $\eta > 0$에 대해서도 $d(g^i x, g^{i+1}x) < \eta$, $d(g^{-i} \cdot g^i x, g^{-i} \cdot g^{i+1}x) = d(x, gx)$를 만족하는 i가 존재한다는 뜻인데, 이는 $\{g^j : j \in \mathbb{Z}\} \subseteq G$의 균일연속성에 위배된다. 따라서 gJ의 왼쪽 끝점과 J의 오른쪽 끝점은 일치해야 한다.

이제 gJ의 오른쪽 끝점이 J의 오른쪽 끝점과 일치하지 않는다고 가정해 보자. 그말은 $J' := S^1 \setminus (g \operatorname{int} J)$라는 구간의 왼쪽 끝점과 $g^{-1}J' = S^1 \setminus \operatorname{int} J$의 왼쪽 끝점이 일치하지 않는다는 말이다. 더하여 $g^{-1}J' \subseteq J'$가 성립한다. 상술한 논증을 적용하면 마찬가지로 모순을 얻는다. 이로써 증명이 끝난다. □

주장 2.18는 다음과 같은 결과를 낳는다.

주장 2.20. *임의의 두 점 $x, y \in S^1$ 및 G_+ 안의 임의의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$에 대해*

$$(g_n x)_{n>0}\text{가 수렴함} \;\Leftrightarrow\; (g_n y)_{n>0}\text{가 수렴함}$$

이 성립한다.

또한, G가 균일연속하므로, 어떤 점 $x \in S^1$으로 수렴하는 점의 나열 $x_1, x_2, \ldots \in S^1$ 및 G 안의 임의의 원소 나열 $(g_n)_{n<0}$에 대해

$$(g_n x)_{n>0}\text{가 수렴함 } \Leftrightarrow (g_n x_n)_{n>0}\text{가 수렴함}$$

이 성립한다. 또 두 나열이 수렴할 경우 그 수렴값 또한 일치한다. 이를 종합하면 다음과 같다.

주장 2.21. *원 안에서 수렴하는 임의의 점의 나열 $(x_n)_{n>0}$, 임의의 점 $y \in S^1$ 및 G_+ 안의 임의의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$에 대해*

$$(g_n x_n)_{n>0}\text{가 수렴함 } \Leftrightarrow \ (g_n y)_{n>0}\text{가 수렴함}$$

이 성립한다.

이제 본격적으로 G_+가 보존하는 측도를 건설하겠다. 이를 위해 $x_0 \in S^1$을 고정하자.

주장 2.22. *각 $N \in \mathbb{Z}_{>1}$마다, 다음을 만족하는 점 $x_{1;N}, x_{2;N}, \ldots, x_{N-1;N} \subseteq S^1$이 각각 유일하게 존재한다. 편의상*

$$x_{kN+l;N} := x_{l;N},\ x_{kN;N} := x_0 \quad (k \in \mathbb{Z}, l \in \{1, \ldots, N-1\})$$

로 표기하겠다.

(1) *구간 $(x_0 =: x_{0;N}, x_{1;N}), (x_{1;N}, x_{2;N}), \ldots, (x_{N-1;N}, x_{N;N} := x_0)$들은 서로 겹치지 않는다.*
(2) $\lim_n g_n x_0 = x_{1;N}$*이게끔 하는 임의의 G_+의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$에 대해 (참고: 문장 2.1),* $\lim_n g_n^k x_{i;N} = x_{i+k;N}$*가 각 $i, k \in \mathbb{Z}$마다 성립한다.*

주장 2.22의 증명.. 문장 2.1에 의해, 임의의 $y \in S^1$가 주어졌을 때 $\lim_n g_n x_0 = y$이게끔 하는 G_+의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$이 존재한다. 이때 각 $k > 0$에 대하여 $x_k(y) := \lim_n g_n^k x_0$로 정의하면, 주장 2.21 덕분에 $x_k(y)$의 정의에서 나타나는 극한은 잘 정의되며, 그 값은 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$의 선택지에 의존하지 않는다. 또 주장 2.21 덕분에 $x_1(y), x_2(y), \ldots$ 각각은 y에 대해 연속이다. 이제,

$$\mathcal{A} := \left\{y \in S^1 \setminus \{x_0\} : \ \big(x_0 := x_0(y), y := x_1(y)\big), \big(x_1(y), x_2(y)\big), \ldots, \big(x_{N-1}(y), x_N(y)\big)\text{이 서로 겹치지 않음}\right\}$$
$$= \left\{ y \in S^1 \setminus \{x_0\} : \sum_{k=1}^{N} \big((x_{k-1}(y), x_k(y))\text{의 길이}\big) \le 1 \right\}$$

라는 집합을 정의하겠다. (여기서 $x_k(y)$들이 잘 정의된다는 것은 주장 2.21이 보장한다.) 먼저 $\mathcal{A}$의 영역이 어느 정도 제한되어 있다는 점을 관찰하겠다. 이를 위해, $\delta = \delta(1/10)$를 잡은 뒤, $[x_0, y]$의 길이가 $1 - 0.5\delta$를 넘도록 하는 $y \in S^1$을 생각해보자. 그런 y에 대해 $g_n x_0 \to y$인 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$을 가져오면 충분히 큰 n에 대해 $d(x_0, g_n x_0) > 2 \cdot \epsilon$가 성립하고, 주장 2.18에 의해 $d(g_n x_0, g_n^2 x_0)$는 δ보다 커진다. 이에 따라 (x_0, x_1) 및 (x_1, x_2)의 길이 합은 1보다 크고 두 구간은 겹칠 수밖에 없다. 따라서 이러한 y는 $\mathcal{A}$에 속할 수 없다. 다시 말해, $\mathcal{A}$가 길이 $1 - 0.5\delta$ 이하인 구간에 포함되어 있다.

이제 $\mathcal{A}$의 최소 상한을 생각하자. 더 엄밀하게는,

$$I := \bigcap_{y \in \mathcal{A}} [x_0, y] \subseteq S^1$$

는 원 위의 구간이기에 어떤 $s \in S^1$에 대하여 $[x_0, s]$ 또는 $[x_0, s)$의 형태인데, 이 s를 $\mathcal{A}$의 상한이라고 부르겠다. 그러면 함수 $x_1(y), x_2(y), \ldots$의 연속성에 의해, $\sum_{k=1}^{N} \big((x_{k-1}(s), x_k(s))\text{의 길이}\big) = 1$임을 알 수 있다. 이는 곧 $x_N(y) = x_0$임을 의미하고, 이로부터 귀납적으로 $x_{kN+l} = x_l$임이 따라나온다. 더하여, 주장 2.21을 다시 한번 적용하면 $\lim_n g_n^k x_i = x_{i+k}$를 관찰할 수 있다.

이제 남은 것은 점 $x_{1;N}, x_{2;N}, \ldots x_{N-1;N}$의 유일성이다. 참고로, 명제의 조건으로부터 $x_{1;N}$의 유일성만 증명해 내면, (2)의 조건 $\lim_n g_n^k x_{1;N} = x_{1+k;N}$로부터 나머지 점들의 유일성은 따라나온다. (이는 또다시 주장 2.21 덕분이다) 따라서,

$$\sum_{k=1}^{N} \big((x_{k-1}(y), x_k(y))\text{의 길이}\big) = 1 \tag{2.2}$$

이게끔 하는 y의 유일성만 보이면 된다.

이를 귀류법으로 보이기 위해, 등식 2.2가 성립하게끔 하는 서로 다른 두 입력값 $y_1, y_2 \in S^1 \setminus x_0$가 있다고 가정하자. 일반성을 잃지 않고 y_1이 y_2보다 더 왼쪽에 있다고 가정하자. 즉, $\epsilon_1 := ([x_0, y_2]\text{의 길이}) - ([x_0, y_1]\text{의 길이}) > 0$이라고 가정하는 것이다. 귀납적으로,

$$\epsilon_{i+1} := \delta(\epsilon_i/4)$$

를 정의하자. 이로부터 $x_N(y_2)$가 $x_N(y_1)$보다 ϵ_N 이상 오른쪽에 있다는 것을 보여, $x_N(y_2) = x_N(y_1)$에 모순임을 이끌어내는 것이 우리의 목표다.

이를 위해, 귀납적으로 $x_k(y_2)$가 $x_k(y_1)$보다 ϵ_k 이상 오른쪽에 있다고 해보자. 이와 함께 $\lim_n g_n x_0 = y_1, \lim_n h_n x_0 = y_2$인 원소 나열 $(g_n)_{n>0}, (h_n)_{n>0}$을 준비하자. 그러면 충분히 큰 n에 대해, $h_n^k g_n^{-k} \cdot g_n^k x_0 = h_n^k x_0$는 $g_n^k x_0$보다 $\epsilon_k/2$ 이상 오른쪽에 있다. 그러면 주장 2.18에 의해 $h_n^k g_n^{-k} \cdot g_n^{k+1} x_0$는 $g_n^{k+1} x_0$로부터 최소 $\delta(\epsilon_k/2)$ 이상 떨어져 있어야 한다. 또, 만약 $h_n^k g_n^{-k} \cdot g_n^{k+1} x_0$가 $g_n^{k+1} x_0$보다 오른쪽에 있지 않다면,

$$h_n g_n^{-k} \cdot [g_n^k x_0, g_n^{k+1} x_0] \subsetneq [g_n^k x_0, g_n^{k+1} x_0]$$

가 성립해 주장 2.19에 모순이다. 이를 종합하면, $h_n^k g_n x_0$는 $g_n^{k+1} x_0$보다 최소 ϵ_{k+1} 이상 오른쪽에 있음을 알 수 있다. 또, (충분히 큰 n에 대해) $x_0, h_n x_0), (h_n x_0, h_n^2 x_0), \ldots, (h_n^k x_0, h_n^{k+1} x_0)$은 순서대로 왼쪽부터 오른쪽으로 줄지어 놓인 구간들이고 $g_n x_0$이 $(x_0, h_n x_0)$ 사이에 있으므로, $h_n^{k+1} x_0$은 $h_n^k g_n x_0$보다도 더욱 오른쪽에 있다. 즉 충분히 큰 n에 대해 항상$h_n^{k+1} x_0$은 $g_n^{k+1} x_0$보다 ϵ_{k+1} 이상 오른쪽에 있으므로, $x_{k+1}(y_1)$ 및 $x_{k+1}(y_2)$의 위치 관계에 대한 주장이 따라나온다. 이로써 증명이 끝난다. □

이제, 각각의 $N \in \{2^k : k \in \mathbb{Z}_{>1}\}$마다, $x_{k;N}$을 $x_{k/N}$이라고 표기하겠다. 이 표기가 일관성 있기 위해서는 $x_{k;N} = x_{2k;2N}$라는 등식이 항상 성립해야 하는데, 이는 주장 2.22의 결론의 조건 (2) 및 $x_{i;j}$들의 유일성으로부터 따라나온다.

이로부터 유한 2진 소수들 $\mathcal{S} := \{\Pi(i/2^k) : k > 0, i = 1, \ldots, 2^k\} \subseteq S^1$로부터 S^1로의 사상 $\rho : a \mapsto x_a$가 잘 정의된다. 주장 2.22의 결론의 조건 (1)로부터 이 사상이 단조적임을 알 수 있다. 또 이 사상은 $\mathcal{S} \subseteq S^1$에 제한해서 보았을 때도 균일연속하다. 실제로, 임의의 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때 $\delta = \delta(\epsilon)$을 잡을 수 있다. 이때 만약 어떤 $k > 0$ 및 $i \in \{1, \ldots, 2^k\}$에 대해 $d(x_{(i-1)/2^k}, x_{i/2^k}) > 2\epsilon$이 성립한다면, 주장 2.18에 의해 다른 모든 $j \in \{1, \ldots, 2^k\}$에 대해서도 $d(x_{(j-1)/2^k}, x_{j/2^k}) > \delta$임을 알 수 있다. 이는 곧

$$2^k \cdot \delta < \sum_{j=1}^{2^k} \big((x_{(j-1)/2^k}, x_{j/2^k})\text{의 길이}\big) \leq 1$$

라는 결론으로 이어져, k의 상한을 하나 제시한다. 다시 말해, 이 상한보다 더 큰 k에 대해서는 각 i에 대해 $[x_{(i-1)/2^k}, x_{i/2^k}]$의 길이가 ϵ 이하이다.

이처럼 ρ가 원 위에서 조밀한 집합인 $\mathcal{S}$로부터 S^1로 향하는 단조적인 균일연속 사상이기에, ρ는 S^1에서 S^1로 향하는 단조적인 연속사상으로 확장된다. 또한, ρ의 차수를 계산하는 한 방법으로 $[0, 1]$을 따라 $\Pi^{-1} \circ \rho \circ \Pi$의 변화량을 적분하는 것이 있는데, $\mathcal{S}$ 안의 점점 조밀해지는 샘플 입력값들을 이용해

계산했을 때 항상 그 값이 1이도록 정의했기에 (이는 주장 2.22의 결론 (1), 즉 등식 2.2에 다름 아니다) ρ의 차수 또한 1이다. 즉, ρ는 S^1 위의 위상동형사상이다.

이제 S^1 상의 Lebesgue 측도 μ의 당겨옴(pullback) $\rho^*\mu$를 정의할 수 있다. 즉, Borel 집합 $A \subseteq S^1$에 대해 $(\rho^*\mu)(A) := \mu(\rho^{-1}(A))$로 정의하는 것이다. 이 측도가 G_+의 작용에 불변한다는 것을 증명하기 위해서는 각각의 $s \in [0,1]$에 대해 $I = [x_0, x_s]$의 측도가 G_+의 작용에 의해 변하지 않음을 관찰하기만 하면 된다. 이를 위해 $g \in G_+$을 하나 생각하자. 그러면 각 $k > 0$마다

$$gx_0 \in [x_{(i(k)-1)/2^k}, x_{i(k)/2^k}],\ \ gx_s \in [x_{(j(k)-1)/2^k}, x_{j(k)/2^k}]$$

를 만족하는 $i(k), j(k)$가 있다. 이때 $(\rho^*\mu)(A) = \lim_k 2^{-k}[j(k) - i(k)] = s$로 정의된다.

이제, 주장 2.22에 의해 다음을 보장할 수 있다. 어떤 G의 원소 h_k가 $d(hx_0, x_{1/2^k})$를 충분히 작게 한다면, $h_k^{-i(k)}x_0$는 $x_{(i(k)-1)/2^k}$를 $x_{(2^k-1)/2^k}$ 근처로, $x_{i(k)/2^k}$를 x_0 근처로 보낸다. 이는 특히

$$h_k^{-i(k)}gx_0 \in h_k^{-i(k)}[x_{(i(k)-1)/2^k}, x_{i(k)/2^k}] \subseteq [x_{(2^k-2)/2^k}, x_{1/2^k}]$$

가 성립함을 의미한다. 마찬가지로, $d(hx_0, x_{1/2^k})$가 충분히 작기만 하다면,

$$h_k^{-i(k)}gx_s \in h^{-i(k)}[x_{(j(k)-1)/2^k}, x_{j(k)/2^k}] \subseteq [x_{(j(k)-i(k)-2)/2^k}, x_{(j(k)-i(k)+1)/2^k}]$$

가 성립한다. 이제 k를 무한대로 보낼 때, $h_k^{-i(k)}g$는 x_0를 점점 x_0 가까이 보낸다. 그러면 주장 2.20에 의해 $h_k^{-i(k)}gx_s$ 또한 x_s에 가까워진다. 따라서 $2^{-k}(j(k) - i(k))$가 s로 수렴하고, $[x_0, x_s]$의 $g[x_0, x_s]$의 $\rho^*\mu$값은 s로 일치하게 된다. 즉 임의의 $g \in G_+$가 x_0를 왼쪽 끝점으로 가지는 임의의 구간의 $\rho^*\mu$값을 보존하고, 이는 G_+가 $\rho^*\mu$값을 보존함을 의미한다.

만약 $G_+ = G$라면 이대로 증명이 끝난다. 그렇지 않은 경우, 각각의 $r \in G \setminus G_+$가 측도 $\rho^*\mu$를 보존함을 증명해야 한다. 즉, 임의의 닫힌 구간 I에 대해 $r\rho^{-1}(I)$와 $\rho^{-1}(I)$의 길이가 같음을 확인해야 한다. 귀류법을 적용하기 위해 어떤 $r \in G \setminus G_+$, 어떤 $0 < \epsilon < 0.1$ 및 어떤 닫힌 구간 I에 대해, $r\rho^{-1}(I)$가 $\rho{-}1(I)$보다 ϵ 이상 길다고 가정해 보자. 그러면 $\rho^{-1}(I)$의 왼쪽 끝점을 $r\rho^{-1}(I)$의 왼쪽 끝점으로부터 오른쪽으로 $\epsilon/4$ 이상 $\epsilon/2$ 이하 떨어져 있도록 보내는 $g \in G_+$가 존재한다. 이는 G_+의 작용이 최소한이기 때문이다. 이때 $g\rho^{-1}(I)$의 길이는 $\rho^{-1}(I)$와 같으므로, $g\rho^{-1}(I)$는 $r\rho^{-1}(I)$에 포함되면서 그 왼쪽 끝점이 차이나게 된다. 다시 말해, $gI \subsetneq rI$이다. 이는 $rg^{-1} \in G$라는 사실 및 주장 2.19에 모순이다. 따라서 이러한 일은 생길 수 없고, 각 $r \in G \setminus G_+$ 역시 측도 $\rho^*\mu$를 보존한다. □

이제 원 위에서 최소한이지만 균일연속하지 않은 작용들, 즉 팽창적인 작용들을 살펴보겠다.

보조정리 2.23. Homeo(S^1)*의 어느 부분군* G*의 작용이 최소한이면서 팽창적이라고 하자. 그러면 강하게 팽창적인 작용을 가지는 부분군* $\rho(G) \le$ Homeo(S^1)*로 향하는 군 맞춤 사상* $\rho : G \to \rho(G) \le$ Homeo(S^1) *및 원의 자가 덮음 사상* $\pi : S^1 \to S^1$*이 존재하여 각* $g \in G$*마다*

$$\pi \circ g = \rho(g) \circ \pi$$

가 성립한다.

Proof. 이번에도 $G_+ := G \cap \mathrm{Homeo}(S^1)$로 두면, $G = G_+$이거나 혹은 G_+가 G의 지수 2짜리 정규 부분군이다. 그 어느 경우이든, G의 작용이 최소한이므로 G_+의 작용 또한 최소한임을 기억하자. G가 이미 강하게 팽창적인 경우 π 및 ρ를 항등사상들로 두는 것으로 증명이 끝난다. 이제 G가 팽창적이되 강하게 팽창적이지는 않다고 가정해 보자. 그렇다면 G_+ 또한 팽창적이되 강하게 팽창적이지는 않다.

편의상, 어떤 구간 $I \subseteq S^1$가 $\inf_{g \in G_+} \operatorname{diam}(gI) = 0$을 만족할 때 I가 *축약 가능하다(contractible)*고 부르겠다. 그러면 다음을 쉽게 관찰할 수 있다.

사실 2.24. *임의의 구간 $I, J \subseteq S^1$ 및 $g \in G_+$에 대해,*

$$I\text{가 축약 가능하고 } gJ \subseteq I\text{임 } \Rightarrow J\text{가 축약 가능함}$$

이 성립한다.

G_+에 대한 가정으로부터, 축약 가능한 열린 구간 I 및 축약 불가능한 원 전체가 아닌 열린 구간 J가 적어도 하나씩 존재함을 알 수 있다. G_+의 작용이 최소한이므로, $\{g^{-1}I : g_+ \in G\}$ 및 $\{g^{-1}(S^1 \setminus \bar{J}) : g_+ \in G\}$는 각각 S^1의 열린 집합 덮개가 된다. Lebesgue 덮음 보조정리에 의해 적당한 $\epsilon_G > 0$에 대해 다음이 보장된다: 임의의 구간 $A \subseteq S^1$에 대해

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(A) < \epsilon_G &\Rightarrow A \subseteq g^{-1}I\text{를 만족하는 } g_+ \in G\text{가 존재함} \Rightarrow A\text{는 축약 가능}, \\ \operatorname{diam}(A) > 1 - \epsilon_G &\Rightarrow A \supseteq g^{-1}J\text{를 만족하는 } g_+ \in G\text{가 존재함 } \Rightarrow A\text{는 축약할 수 없음} \end{aligned} \tag{2.3}$$

가 성립한다.

특히,

$$\mathcal{A}_x := \{y \in S^1 \setminus \{x\} : [x, y]\text{가 축약 가능함}\}$$

은 길이 ϵ_G짜리 구간을 포함하면서 길이 $1 - \epsilon_G$짜리 구간에 포함된다. 또한, 사실 2.24로부터 다음을 알 수 있는데, 만약 $y \in \mathcal{A}_x$이고 $z \in [x, y]$라면 $z \in \mathcal{A}_x$라는 점이다. 이를 종합하면, $\mathcal{A}_x$라는 집합은 어떤 $y \neq x$에 대해 (x, y) 혹은 $(x, y]$라는 형태를 가진다. 이때 이 점 y를 $\phi(x)$라고 정의하겠다.

주장 2.25. *사상 $\phi : S^1 \to S^1$와 G_+의 원 위의 작용은 호환 가능하다. 그말인즉, 임의의 $x \in S^1$ 및 임의의 $g \in G_+$에 대해 $\phi(gx) = g\phi(x)$가 성립한다.*

Proof. $x \in S^1$ 및 $g \in G_+$를 임의로 생각했을 때, 각각의 $y \in \mathcal{A}_x$마다 $[x, y]$는 축약 가능하고, 따라서 사실 2.24에 의해 $[gx, gy] = g[x, y]$ 또한 축약 가능하다. 이로부터 $\mathcal{A}_{gx} \subseteq g\mathcal{A}_x$임이 따라나온다. 마찬가지 이유로 $\mathcal{A}_x \subseteq g^{-1}\mathcal{A}_{gx}$가 성립하고, g가 일대일대응이므로 $g\mathcal{A}_x \subseteq \mathcal{A}_{gx}$ 또한 성립한다. 즉 $\mathcal{A}_{gx} = g\mathcal{A}_x$이므로 증명이 끝난다. $\square$

이제 다음과 같은 ϕ의 '단조성'을 쉽게 관찰할 수 있다. 사실 원에서 자기 자신으로 가는 사상의 단조성을 얘기하기 위해서는 실수 집합으로 끌어올려야 하기에, 그 사상의 연속성을 논하는 것이 먼저여야 한다. 하지만 우리 증명에서는 '단조성'이 연속성보다 먼저 필요하다.

주장 2.26. *그 어떤 $x, y \in S^1$에 대해서도, $\big[y, \phi(y)\big]$가 $\big[x, \phi(x)\big)$에 포함되는 일은 일어나지 않는다.*

Proof. 귀류법을 적용하기 위해, $\big[y, \phi(y)\big] \subseteq \big[x, \phi(x)\big)$를 가정해 보자. 이는 $\phi(x) \notin \big[y, \phi(y)\big]$를 의미한다. 한편, $\big(x, \phi(x)\big)$에 포함되어 있는 $\big(y, \phi(x)\big)$의 각 점 z에 대해 $[y, z] \subseteq [x, z]$는 축약 가능하다. 그렇다면 $\phi(y)$의 정의상 $\big[y, \phi(x)\big)$는 $\big[y, \phi(y)\big)$에 포함되어야 한다. 이는 $\phi(x)$가 $\big[y, \phi(y)\big]$ 바깥에 있다는 관찰과 모순이기에 증명이 끝난다. $\square$

이제 ϕ의 연속성을 보이겠다. 귀류법을 적용하기 위해,

$$\lim_n x_n = a = \lim_n y_n, \quad \lim_n \phi(x_n) = b \neq c = \lim_n \phi(y_n)$$

을 만족하는 세 점 $a, b, c \in S^1$ 및 원 위의 점의 나열 $(x_n)_{n>0}$, $(y_n)_{n>0}$을 생각하자. 일반성을 잃지 않고, $c \in (a, b)$라고 가정하자.

G_+의 작용이 최소한이기에 b를 (c,b) 안으로 보내는 $g \in G_+$가 존재한다. 이때 만약 ga가 $[a, gb)$ 안에 있으면 $[ga, gb]$는 (a,b)에 포함되고, 충분히 큰 n 및 그보다 더욱 충분히 큰 m에 대해 $\big[gy_m, g\phi(y_m)\big]$가 $\big[y_n, \phi(y_n)\big)$에 포함된다. 이는 주장 2.26에 모순이다. 다음으로, 만약 $ga \in (gb, a)$라면 (ga, gb)는 $[a, c]$를 포함하고, 충분히 큰 n에 대해 $\big[gy_n, g\phi(y_n)\big)$가 $\big[x_n, \phi(x_n)\big]$을 포함한다. 이는 마찬가지로 모순이다. 마지막으로, g는 일대일대응이기에 $ga \neq gb$이다. 따라서 가정한 상황은 생길 수 없고, ϕ는 연속하다.

이제 점 $x_0 := \Pi(0) \in S^1$를 고정하고, $\tilde{\phi}(0) = ([x_0, \phi(x_0)]$의 길이)를 만족하는 ϕ의 $\mathbb{R}$로의 끌어올림 $\tilde{\phi}$를 생각하면, $\tilde{\phi}(t) := [t + \epsilon_G, t + 1 - \epsilon_G]$가 항상 성립한다. 이는 곧 ϕ의 차수가 1임을 의미한다.

다음으로 ϕ가 일대일 사상임을 보이겠다. 귀류법을 적용하기 위해, 어떤 $a \in S^1$에 대해 $\phi^{-1}(a)$가 한 개 이상의 점을 가지고 있다고 가정하자. $x \in \phi^{-1}a$에 대한 $[x,a]$의 길이의 최대 하한을 m, 최소 상한을 M이라고 하면 $\epsilon_G \leq m < M \leq 1 - \epsilon_G$이 성립한다. $[b,a]$의 길이가 M, $[c,a]$의 길이가 m이게끔 하는 두 점 $b, c \in S^1$을 잡으면, b와 c는 $\phi^{-1}(a)$의 집적점이기에 ϕ의 연속성에 의해 둘 다 $\phi^{-1}(a)$에 속한다.

이제 c를 (b,c) 안으로 보내는 어떤 $g \in G_+$를 생각하자. 이때 만약 $ga \in (a, gc)$라면 $[c, \phi(c)] = [c, a] \subseteq [gc, ga) = [gc, \phi(gc))$가 성립해 주장 2.26에 모순이다. 만약 $ga \in (gc, a)$라면 $[gc, ga] = [gc, \phi(gc)]$가 $[b, a) = [b, \phi(b))$에 포함되어 역시 주장 2.26에 모순이다. 마지막으로, g는 일대일대응이기에 $ga \neq gc$이다. 이를 종합하면, c를 (b,c) 안으로 보내는 $g \in G_+$는 반드시 a를 고정해야 한다는 것이다. 여기서 (gc, a) 안에 c가 포함되어 있음을 유념하자. 이는 곧 $g^{-1}c \in g^{-1}(gc, a) = (c, g^{-1}a) = (c, a)$임을 의미한다. 다시 말해, $[g^{-1}c, a]$는 $[c, a]$보다 짧은 구간이면서, $\phi(g^{-1}c) = g^{-1}\phi(c) = g^{-1}a = a$가 성립한다. 이는 $x \in \phi^{-1}a$에 대한 $[x, a]$의 길이의 최솟값이 c에서 구현된다는 사실에 모순이다.

위 모순에 의해, ϕ가 일대일 사상이라는 것이 따라나온다. 그러면 $\phi : S^1 \to S^1$는 연속이고 일대일 사상이면서 차수가 1이다. 이는 곧 ϕ가 방향 보존 위상동형사상임을 의미한다.

이제 $x \in S^1$을 임의로 하나 고정한 뒤, $S_k(x) := \sum_{i=1}^{k}([\phi^{i-1}x, \phi^i(x)]$의 길이)가 1 이하이도록 하는 양의 정수 k 중 최댓값을 N이라고 적자. (N은 반드시 유한하고, 특히 반드시 $1/\epsilon_G$ 이하이다.) 만약 $\phi^N x = x$라면 $S_N(x) = 1$이 성립하고, 이 경우 $y = x$로 둔다. 만약 그렇지 않다면, $S_N(x) < 1$, $S_{N+1}(x) > 1$이 성립한다. 그러면 $[\phi^{N-1}x, x]$는 $[\phi^{N-1}x, \phi^N x]$보다 짧은 부분구간이므로 축약가능하고, 따라서 G_+의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$이 존재해 $d(g_n\phi^N x, g_n x) = d(\phi^N g_n x, g_n x) \to 0$이 성립한다. 필요하다면 $(g_n)_{n>0}$을 적당한 부분나열로 대체함으로써 나열 $(g_n x)_{n>0}$이 어떤 점 $y \in S^1$로 수렴한다는 것을 보장할 수 있다. 한편, $S_N(x) < 1$로부터 $(x, \phi x), \ldots, (\phi^{N-1}x, \phi^N x)$가 모두 서로 겹치지 않음을 알 수 있는데, 각각의 g_n은 위상동형사상이므로 구간들의 겹침 여부를 보존한다. 즉, $(g_n x, g_n \phi x = \phi g_n x), \ldots, (\phi^{N-1}g_n x, \phi^N g_n x)$는 모두 겹치지 않으므로, $S_N(g_n x) \leq 1$이 각 n마다 성립한다. 이제 ϕ의 연속성을 이용하면 $S_N(y) \leq 1$임을 알 수 있다. 한편, $g_n x \to y$이고 $d(\phi^N g_n x, g_n x) \to 0$이므로, ϕ의 연속성에 의해 $\phi^N y = y$이다. 이 사실과 $\epsilon_G N \leq S_N(y) \leq 1$를 결합하면 $S_N(y) = 1$임을 알 수 있다. 즉,

$$[y, \phi y], [\phi y, \phi^2 y], \ldots, [\phi^{N-1}y, \phi^N y = y]$$

는 그 내부끼리는 서로 겹치지 않으면서 원 전체를 덮는다.

이제 y를 임의의 $g \in G_+$로 움직여 보자. 그러면

$$[gy, \phi gy], \ldots, [\phi^{N-1}gy, \phi^N gy = g\phi^N y = gy]$$

의 내부끼리 겹치지 않는다는 사실이 유지되기에, $S_N(gy) = 1$가 성립한다. 이제 임의의 점 $z \in S^1$이 주어졌을 때 $g_n y \to z$이게끔 하는 G_+의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$을 잡으면, 모든 $S_N(g_n y) = 1$이 성립하고 (ϕ의 연속성의 결과인) $S_N(\cdot)$의 연속성으로부터 $S_N(z) = 1$임을 알 수 있다. 즉, $S_N(\cdot)$는 원 위에서 항상 1이라는 상수값을 가진다. 다시 말해, 임의의 점의 ϕ-궤도는 점 N개짜리 집합이고, S^1의 각 ϕ-궤도를

한 점씩으로 묶어 내면 차수 N짜리 덮음 사상 $\pi : S^1 \to S^1$가 만들어진다. ϕ와 G_+의 작용이 호환 가능하기에, G_+는 몫공간인 S^1에도 자연스럽게 작용한다.

이제 G 전체가 몫공간인 S^1에 자연스럽게 작용하기 위해서는 $G \setminus G_+$의 각 원소의 작용이 덮음 사상 π와 호환 가능해야 한다. 이에 다음을 관찰하자.

주장 2.27. *임의의 $x \in S^1$ 및 임의의 $r \in G \setminus G_+$에 대해, $r\phi(x) = \phi^{-1}(rx)$가 성립한다.*

주장 2.27의 증명 $I = [x, \phi(x)]$라고 두고, $rI = [r\phi(x), rx]$는 다음 세 가지 중 하나를 만족한다.

(1) $rI \subsetneq [r\phi(x), \phi r\phi(x)]$: 이 경우, ϕ의 연속성을 이용하면 $rI \subseteq (c, \phi(c))$인 점 $c \in S^1$를 잡아줄 수 있다. 이제 G_+의 작용이 최소한이라는 점과 ϕ의 연속성을 이용하면 $rI \subseteq (gx, \phi gx) = (gx, g\phi x)$이게끔 하는 $g \in G_+$를 찾을 수 있다. 이는 곧 $rI \subsetneq gI$ 및 $I \subsetneq r^{-1}gI \subsetneq r^{-1}gr^{-1}gI$를 의미한다. 여기서 $h := r^{-1}gr^{-1}g$는 G_+의 원소이므로, 주장 2.25에 의해 $[x, \phi(x)] \subsetneq hI = [hx, h\phi(x)] = [hx, \phi(hx))]$임을 얻는다. 이는 ϕ가 순증가한다는 사실에 모순이다.

(2) $rI \supsetneq [r\phi(x), \phi r\phi(x)]$: 이 경우, $r' := r^{-1}$, $y := r\phi(x)$, $J := [y, \phi y]$에 대해 생각해 보면 $r'J \subsetneq r'rI = [\phi^{-1}(r'r\phi(x)), r'r\phi(x)]$가 성립한다. 그러면 위와 비슷한 이유로 $r'J \subsetneq gJ = g[y, \phi(y)]$이도록 하는 $g \in G_+$를 찾을 수 있다. 그러면 $r'^{-1}gr'^{-1}g$는 G_+의 원소이면서 J를 그보다 더 큰 구간으로 보내는데, 이는 ϕ가 순증가한다는 사실에 모순이다.

(3) $rx = \phi r\phi r(x)$가 성립한다.

이중 세번째 경우만이 가능하므로 증명이 끝난다. □

즉 $G \setminus G_+$의 임의의 원소 r은 임의의 $x \in S^1$가 주어졌을 때 그 ϕ-궤도 $\{x, \phi x, \ldots, \phi^{N-1}x\}$를 다른 ϕ-궤도 $\{rx, \phi^{-1}(rx), \phi^{-2}(rx), \ldots, \phi^{-(N-1)}rx\} = \{rx, \phi(rx), \ldots, \phi^{N-1}(rx)\}$로 보낸다는 것을 알 수 있고, 따라서 G 전체가 몫공간인 S^1에도 자연스럽게 작용한다. 즉, π와 호환되는 군 맞춤 사상 $\rho : G \to \rho(G)$가 존재한다.

이제 몫공간 S^1에서 임의의 닫힌 구간 I가 주어졌을 때, $S^1 \setminus I$ 안의 점 c를 하나 잡으면 $\pi^{-1}(I)$는 N개의 연결 성분으로 이루어져 있으며 각각은 $[c, \phi(c)), [\phi(c), \phi^2(c)), \ldots, [\phi^{N-1}(c), \phi^N(c) = c)$ 안에 포함되어 있다. 예를 들어 $[c, \phi(c))$ 안에 있는 연결성분 $\tilde{I}$를 택하면, $\tilde{I}$는 축약 가능하고 $\inf_{g \in G} \operatorname{diam}(g\tilde{I}) = 0$이 성립한다. 이 사실은 덮음 사상 π를 통해서도 전달되므로 $\inf_{g \in G} \operatorname{diam}(\rho(g)I) = 0$ 또한 성립한다. 따라서 $\rho(G)$의 작용은 강하게 팽창적이다. □

여기서 근접성에 관한 논의를 잠깐 마무리짓겠다. 만약 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 어떤 부분군 G의 작용이 최소한이라면, G의 작용은 균일연속하거나, 팽창적이되 강하게 팽창적이지는 않거나, 혹은 강하게 팽창적이다. G의 작용이 균일연속한 경우, 켤레바꾸기를 통해 S^1의 등거리사상 군으로 나타낼 수 있다. 이 경우 임의의 두 점 $x, y \in S^1$ 사이 거리는 G의 작용에 의해 보존되므로, 이 작용은 근접적일 수 없다. 만약 G의 작용이 팽창적이되 강하게 팽창적이지는 않다면, 보조정리 2.23에서 기술하는 원의 자가 덮음 사상 $\pi : S^1 \to S^1$이 존재해 G의 작용과 π는 호환 가능하고, 몫공간 S^1에서의 G의 작용은 강하게 팽창적이다. 이 경우 π는 차수가 1보다 큰 덮음 사상이어야 한다. 이제 어떤 점 $y \in S^1$을 잡은 뒤 $\pi^{-1}(y)$ 안의 서로 다른 두 점 $a, b \in \pi^{-1}(y)$을 고르면, 그 어느 $g \in G$를 가져와도 ga 및 gb는 같은 π-값을 가지는 다른 점들이다. 이러한 점들 사이 거리는 0에 한없이 가까울 수 없기에 (보조정리 2.23의 증명에서 $d(x, \theta(x)) > \epsilon_G$가 항상 성립했음을 기억하라), $\inf_{g \in G} d(ga, gb) > 0$이다. 따라서 이 경우에도 G의 작용은 근접적일 수 없다. 요약하자면, $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 어떤 부분군 G의 작용이 최소한이라는 가정 하에, G의 작용이 만약 근접적이라면 반드시 강하게 팽창적이어야 한다.

이제 어떤 $G \le \mathrm{Homeo}(S^1)$의 작용이 최소한이고 강하게 팽창적이라면 G 안에는 서로 겹치지 않는 열린 구간 네 개에 결부된 Schottky 순서쌍이 존재함을 관찰하자. 이를 위해 임의의 (원 전체가 아닌) 열린 구간 I을 생각하자. 그러면 I도 $J := (\int I_1)^c$도 축약가능한 구간이므로 $\lim_n \mathrm{diam}(g_n I) = \lim_n \mathrm{diam}(h_n J) = 0$이게끔 하는 G의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$ 및 $(h_n)_{n>0}$이 존재한다. 이때, $\{g_n I : n > 0\}$의 집적점 x 및 $\{h_n J : n > 0\}$의 집적점 y를 서로 다른 것으로 잡을 수 있는지 살펴보자. 이것이 불가능한 유일한 경우는 $(g_n I)_{n>0}$ 및 $(h_n J)_{n>0}$가 모두 같은 점 $x \in S^1$로 수렴할 때뿐인데, 이 경우에는 x를 $S^1 \setminus \{x\}$ 안으로 보내는 어떤 $g' \in G$를 잡으면 $(g_n I)_{n>0}$의 집적점인 x와 $(g' h_n J)_{n>0}$의 집적점인 $g'x$는 서로 다른 점이 된다. 물론 $g' h_n J$의 크기 또한 0으로 수렴하므로, $(h_n)_{n>0}$ 대신 $(g' h_n)_{n>0}$을 사용함으로써 앞의 질문에 대답할 수 있다. 즉, G 안의 적당한 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$ 및 $(h_n)_{n>0}$ 및 원 위의 서로 다른 점 $x, y \in S^1$가 존재하여

$$\mathrm{diam}(g_n I \cup x) \to 0, \quad \mathrm{diam}(h_n J \cup x) \to 0$$

이게끔 할 수 있다.

이제 $\{x, y\}$와 $\{fx, fy\}$가 원소를 공유하지 않게끔 하는 $f \in G$를 찾고자 한다. 먼저, G의 작용이 최소한이기에 $f_1(x), \ldots, f_6(x)$가 (x, y) 안의 서로 다른 여섯 개의 점이 되도록 하는 G의 원소 $f_1, \ldots, f_6$를 찾을 수 있다. 여기서 f_i들 중 어느 하나라도 y를 $\{x, y\}$ 밖의 점으로 보내면 그 원소를 f로 쓰면 된다. 그렇지 않고 예를 들어 $f_1 y$, $f_2 y$ 및 $f_3 y$가 $\{x, y\}$ 안의 어떤 한 점 p로 일치한다고 해보자. 그러면 p를 (x, y) 안으로 보내는 어떤 원소 $f' \in G$가 존재할 텐데, 이때 $f' f_1 y, f' f_2 y$ 및 $f' f_3 y$는 서로 다른 세 점이기에, 이들 중 적어도 하나는 x 도 y도 아니다. 따라서 $f' f_i y \notin \{x, y\}$인 $i \in \{1, 2, 3\}$을 잡을 수 있고, 이때 $f' f_i x = f' p$ 또한 $\{x, y\}$ 바깥에 있어 $f' f_i$를 f로 쓸 수 있다.

이제, 충분히 큰 n에 대해, $g_n I, h_n J, f g_n I, f h_n J$는 서로 다른 네 점에 충분히 가까운 구간들이므로 서로 겹치지 않는다. 이제 $F = h_n g_n^{-1}$ 및 $G = f h_n g_n^{-1} f$를 생각하면 F는 $g_n I^c$를 $h_n \overline{J}$로 보내고, F^{-1}는 $h_n J^c$를 $g_n \overline{I}$로 보내며, G는 $f g_n I^c$를 $f h_n \overline{J}$로, G^{-1}는 $f h_n J^c$를 $f g_n \overline{I}$로 보낸다. 이제 $g_n I, h_n J, f g_n I, f h_n J$를 모두 살짝씩 키워 열린 구간으로 만들되 여전히 서로 겹치지 않게끔 할 수 있고, (F, G)는 이 구간들에 결부된 Schottky 순서쌍이 된다. 이로써 정리 2.1 및 정리 2.2의 증명이 끝난다.

2.4. $\mathrm{Homeo}(S^1)$**의 준군** 이 절에서는 정리 2.3 및 2.4을 증명하려고 한다. 먼저, 불변 확률 측도의 존재성과 임의의 작은 구간의 축약 가능성을 연결짓겠다.

정리 2.28. *$\mathrm{Homeo}(S^1)$의 부분 준군 G 및 원 위의 점 $x \in S^1$에 대해, x를 포함하는 그 어느 근방도 G-축약 가능하지 않다고 가정하자. 더하여, 원 위의 각 점의 G-궤도가 무한하다고 가정하자. 그러면 G의 각 원소에 의해 보존되는 원 위의 확률 측도가 존재한다.*

Proof. 먼저 가정으로부터 다음을 관찰하자:

주장 2.29. *점 x를 포함하는 임의의 열린 구간 I에 대해 양수 $\delta = \delta(x, I)$가 존재하여, 임의의 $g \in G$에 대해 $\mathrm{diam}(gI) > \delta$가 성립한다.*

이는 I가 G-축약 가능하지 않다는 가정으로부터 따라 나오는 것이다.

다음으로 관찰할 명제는 아래와 같다.

주장 2.30. *점 $y \in S^1$ 양수 N가 주어질 때마다 양수 $\epsilon = \epsilon(N, y) > 0$가 존재하여 다음이 성립한다. 점 y를 포함하고 지름 ϵ 이하인 임의의 구간 I에 대해, $g_1 I, \ldots, g_N I$가 서로 겹치지 않게끔 하는 G의 원소 N개 $g_1, \ldots, g_N$이 존재한다.*

Proof. 점 y의 G-궤도가 무한하므로, 이중 서로 다른 점 N개 $g_1 y, \ldots, g_N y$를 잡을 수 있다. 그러면 각 i마다 $g_i x$의 열린 근방 I_i를 적당히 잡아 $I_1, \ldots, I_i$들이 서로 겹치지 않게끔 할 수 있다. 여기서 각 g_i가 연속함수이므로, $\cap g_i^{-1} I_i$는 y의 열린 근방이 된다. 이제 y로부터 $S^1 \setminus (\cap g_i^{-1} I_i)$까지의 거리를 ϵ이라고 잡자. 이제 지름 ϵ 이하이면서 y를 포함하는 구간 I를 생각하면, I는 반드시 $\cap g_i^{-1} I_i$ 안에 포함된다. 따라서 $g_i I \subseteq I_i$가 성립하는데, I_i들끼리 모두 서로 겹치지 않으므로 $g_i I$들끼리도 서로 그러하다. 이로써 방금 잡은 $g_1, \ldots, g_N$ 및 ϵ에 대해 주장이 성립함을 증명했다. □

한편, x를 포함하는 어떤 구간 I를 고정했을 때, 주장 2.29에 의해 그 어떤 $g \in G$에 대해서도 I의 복사본 gI는 그 지름이 $\delta = \delta(x, I)$ 이상이다. 따라서, 서로 겹치지 않는 I의 복사본들의 최대 갯수는 $1/\delta$ 이하이다. 이를 기록하기 위해, 구간 I 및 원의 부분집합 A에 대해

$$N(A; I) := \sup \left\{ \#S : \begin{array}{c} S \subseteq G,\ S\text{의 임의의 원소 } g\text{에 대해 } gI \subseteq A, \\ S\text{의 서로 다른 임의의 두 원소 } g, g'\text{에 대해 } gI \cap g'I = \emptyset\text{임} \end{array} \right\} \tag{2.4}$$

를 정의하자. 그러면 다음을 얻는다:

주장 2.31. *점 x를 포함하는 열린 구간 I 및 원 위의 부분집합 A에 대해, 수식 2.4와 같이 정의된 $N(A; I)$의 값은 유한하다.*

이제 x의 근방 기저(neighborhood basis) $\{I_n\}_{n>0}$를 하나 임시로 잡자. 즉, $\{I_n\}_n$은

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \searrow \{x\}$$

가 성립하는 열린 구간 나열이다. 다음으로 가산 개의 2진 소수들

$$\mathcal{D} := \{2^{-n} k : n > 0, k = 1, \ldots, 2^n\}$$

및 이들을 끝점으로 가지는 2진 반-열림 구간들(half-open intervals)의 모임

$$\mathcal{E} := \{(a, b] : a, b \in \mathcal{D}\}$$

를 생각하자. (편의상 공집합 및 원 전체 집합도 포함한다.) 각 $A \in \mathcal{E}$에 대해,

$$\left(\frac{N(A; I_n)}{N(S; I_n)} \right)_{n>0} = \left(\frac{N(A; I_1)}{N(S; I_1)}, \frac{N(A; I_2)}{N(S; I_2)}, \frac{N(A; I_3)}{N(S; I_3)}, \ldots \right)$$

는 그 값이 0과 1 사이로 한정된 수열이기에 수렴하는 부분수열을 갖는다. 이를 가산 개의 $\mathcal{E}$의 원소에 순차적으로 적용시키면, $\{I_n\}_{n>0}$를 적절한 부분나열로 대체함으로써

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{N(A; I_n)}{N(S; I_n)} =: \mu(A)\text{라는 극한값이 존재함}$$

을 모든 $A \in \mathcal{E}$에 대해 보장할 수 있다.

아직 μ는 S^1 위의 Borel 측도라고 불릴 수는 없다. 그러나 다음 성질은 정의로부터 바로 따라 나온다:

(1) 단조성(monotonicity): $\mathcal{E}$의 두 원소 A, B가 $A \subseteq B$를 만족하면 $\mu(A) \leq \mu(B)$가 성립한다.
(2) 유한 가법성(finite additivity): $\mathcal{E}$의 원소 유한 개 $A_1, \ldots, A_n, A$가

$$A = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$$

을 만족하면, $\mu(A) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$이 성립한다.

또, $\mathcal{E}$는 준환(semiring)을 이루는데, 다시말해 임의의 $A, B \in \mathcal{E}$에 대해 $A \cap B$ 또한 $\mathcal{E}$의 원소이며, $A \setminus B$는 서로 겹치지 않는 $\mathcal{E}$의 원소 두 개의 합집합으로 표현할 수 있다는 것이다. 이 사실과 단조성 및 유한 가법성을 이용하면 다음은 어렵지 않게 보일 수 있다.

(3) 유한 준가법성(finite subadditivity): $\mathcal{E}$의 원소 유한 개 $A_1, \ldots, A_n, A$가

$$A \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

을 만족하면, $\mu(A) \leq \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$이 성립한다.

이어, 다음과 같은 일종의 절대연속성을 얘기할 수 있다. (이는 측도로서의 절대연속성과는 조금 다르다: Remark 2.34를 참고하라.)

주장 2.32. *각각의 $\eta > 0$에 대해 $\epsilon > 0$이 존재해 다음이 성립한다. 어떤 구간 I의 Lebesgue 측도 $\mathrm{Leb}(I)$가 만약 ϵ보다 작다면, 임의의 k에 대해 $N(I; I_k)/N(S^1; I_k) < \eta$가 성립한다. 특히 I가 2진 구간이라면 $\mu(I)$는 η보다 작다.*

Proof. 증명을 위해 $\eta > 0$을 임의로 고정하고, $1/\eta$보다 큰 자연수 N을 하나 생각하자. 이제 각 $y \in S^1$마다 주장 2.30에서와 같이 $\epsilon(y, N)$을 잡을 수 있다. 여기서 $\epsilon(y, N)$를 조금 줄여 2진 소수로 잡을 수 있다. 이제 y를 내부에 포함하는 지름 $\epsilon(y, N)$짜리 2진 반-열림 구간 J_y를 하나씩 잡아 주면, $\{\mathrm{int}\, J_y\}_{y \in S^1}$는 원의 열린 덮개가 된다. 따라서 Lebesgue 덮개 보조정리에 의해, 지름이 ϵ보다 작은 임의의 구간은 반드시 어떤 J_y에 포함되게끔 하는 양수 $\epsilon > 0$가 존재한다. 이제 각각의 y에 대해 $\mu(J_y) < \eta$라는 것을 증명하기만 하면 원하는 결론을 얻는다.

이제 $y \in S^1$을 임의로 잡고 J_y의 μ-값이 η보다 작음을 증명해 보자. 먼저, $g_1 J_y, g_2 J_y, \ldots, g_N J_y$가 모두 서로 겹치지 않게끔 하는 G의 원소 $g_1, \ldots, g_N$이 존재한다. 이제 임의의 자연수 k를 고정한 뒤 $\sqcup_{i=1}^{N(J_y; I_k)} h_i I_k \subseteq J_y$이게끔 하는 $h_1, \ldots, h_{N(J_y; I_k)} \in G$를 잡자. 그러면

$$\{g_l h_i I_k : l = 1, \ldots, N, i = 1, \ldots, N(J_y; I_k)\}$$

에 잡힌 구간들은 모두 서로 겹치지 않는다. 물론 $g_l h_i$들은 준군 G의 원소다. 따라서 $N(S^1; I_k) \geq N \cdot N(J_y; I_k)$ 및 $N(J_y; I_k)/N(S^1; I_k) \leq 1/N$가 성립한다. 이제 k를 한없이 키움으로써 $\mu(J_y) \leq 1/N < \eta$라는 결론을 내릴 수 있다. □

이를 이용해 μ의 가산 가법성을 증명해 보겠다.

주장 2.33. *$\mathcal{E}$의 원소 A 및 원소 가산 개 $A_1, A_2, \ldots$에 대해*

$$A = \sqcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

가 성립한다고 가정하자. 그러면 $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$가 성립한다.

Proof. 먼저 유한 가법성 및 단조성에 의해

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) = \mu\big(A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_N\big) \leq \mu(A)$$

가 성립하고, N을 한없이 키움으로써 $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu(A)$임을 관찰할 수 있다. 이제 역방향을 증명하기 위해, 임의의 $\epsilon > 0$에 대해

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \epsilon \geq \mu(A) \tag{2.5}$$

가 성립함을 증명하자. 명제 2.32에 의해, 각각의 $i \in Z_{>0}$마다 양수 ϵ_i가 존재해 다음이 성립한다:

지름 ϵ_i 이하인 임의의 구간의 μ값은 $\epsilon/3^i$ 이하이다.

이제 $A = (a, b]$로 두자. 만약 A의 지름이 ϵ_1 이하라면 그 μ값은 ϵ 이하이기에 A_i들의 μ값에 관계없이 부등식 2.5가 성립한다. 만약 그렇지 않다면, $(a, c]$의 지름이 ϵ_1이 되게끔 $(a, b]$ 안의 점 c를 잡겠다.

이제, 각각의 A_i는 $(a_i, b_i]$ 형태인데, $[b_i, c_i]$의 지름이 ϵ_i가 되게끔 점 c_i를 잡아 주겠다. 그러면

$$[c, b] \subseteq (a, b] = A \subseteq \sqcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} (a_i, c_i)$$

가 성립한다. $[c, b]$는 컴팩트한 구간이므로, 적당한 양수 N이 존재해

$$[c, b] \subseteq \cup_{i=1}^{N} (a_i, c_i) \subseteq \cup_{i=1}^{M} (a_i, c_i]$$

이로부터

$$(a, b] \subseteq (a, c] \cup \left(\sqcup_{i=1}^{N} (a_i, b_i] \right) \cup \left(\cup_{i=1}^{N} (b_i, c_i] \right)$$

가 성립한다. 이제 유한 준가법성을 활용하면

$$\mu\big((a, b]\big) \leq \mu\big((a, c]\big) + \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) + \sum_{i=1}^{N} \mu\big((b_i, c_i]\big)$$

임을 관찰할 수 있다. 여기서 $(a, c]$의 지름이 ϵ_1이고 $(b_i, c_i]$의 지름은 ϵ_i이하이기에, 이들의 μ값은 각각 $\epsilon/3$ 및 $\epsilon/3^i$ 이하이다. 따라서

$$\mu(A) \leq \epsilon/3 + \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) + \sum_{i=1}^{N} \epsilon/3^i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \epsilon$$

이 성립한다. 이렇게 부등식 2.5가 ϵ의 값에 관계없이 성립하므로, 가법성을 위한 반대 부등식이 따라 나온다. 이로써 증명이 끝난다. $\square$

이제 Carathéodory 확장 정리에 의해, μ는 $\mathcal{E}$로 생성된 σ-대수 위에서의 (가산 가법적인) 측도로 유일하게 확장된다. 여기서 유일성이 성립하는 이유는 $\mu(S^1)$이 유한하기 때문이다. 이 σ-대수에는 임의의 열린 구간이 포함되어 있으므로 Borel σ-대수를 포함한다. 즉, μ는 Borel 측도라고 간주할 수 있다.

남은 것은 μ의 G-불변성이다. 이를 위해 임의의 $g \in G$ 및 임의의 2진 구간 J에 대해 $\mu(J) = \mu(gJ)$임을 증명하겠다. 만약 이를 증명한다면, $\nu_g := g^*\mu$라는 측도는 $\mathcal{E}$ 위에서 μ와 일치하므로 Carathéodory 확장 정리의 유일성 부분에 의해 Borel σ-대수 전체 위에서 μ와 ν_g가 같다는 결론을 낼 수 있기 때문이다. 증명을 위해 $J = (a, b]$ $(a, b \in \mathcal{D})$로 두겠다. (공집합 혹은 S^1일 때의 증명은 자명하므로 $a \neq b$를 가정하겠다.) 또 $\eta > 0$을 임의로 고정한 뒤, 주장 2.32와 같이 η용 $\epsilon > 0$을 잡겠다.

한 가지 문제는, ga 및 gb가 $\mathcal{D}$의 원소가 아닐 수 있다는 점이다. 이를 해결하기 위해, $U_a \ni a$, $U_b \ni b$라는 열린 구간들을 잡되 gU_a 및 gU_b이 서로 겹치지 않고 또 지름이 η보다 작도록 잡겠다. 여기서 U_a 및 U_b를 살짝 더 작은 구간으로 잡음으로써 gU_a 및 gU_b가 실은 $\mathcal{E}$의 원소, 즉 끝점이 2진 소수인 반-열림 구간이도록 하는 것은 어렵지 않다.

이제 $J_1 = J \setminus (U_a \cup U_b)$, $J_2 = (S^1 \setminus J) \setminus (U_a \cup U_b)$로 적겠다. 즉 J_1 및 J_2는 각각 J 및 $S^1 \setminus J$보다 살짝씩 작은 구간이고, gJ_1, gJ_2, gU_a, gU_b는 S^1를 4분할하는 $\mathcal{E}$의 원소들이다.

이제, 자연수 k를 임의로 고정하자. 편의상 $N(S^1; I_k)$를 N_k로 줄여 쓰겠다. $N(\cdot; I_k)$의 정의에 의해

$$\sqcup_{i=1}^{N(J;I_k)} g_i I_k \subseteq J, \quad \sqcup_{i=1}^{N(S^1 \setminus J; I_k)} g_i' I_k \subseteq (S^1 \setminus J)$$

를 만족하는 $g_1, \ldots, g_{N(J;I_k)}, g'_1, \ldots, g'_{N(S^1 \setminus J;I_k)} \in G$를 고를 수 있다. 그러면

$$\sqcup_{i=1}^{N(J;I_k)} gg_iI_k \subseteq gJ$$

임은 쉽게 확인할 수 있다. 여기서, 서로 겹치지 않는 구간들 $\{gg_iI_k\}_i$ 중 gU_a에 속하는 것은 최대 $\eta \cdot N_k$개이다. 이는 주장 2.32에 따른 것이다. 물론 개중에는 gU_a에 겹치기만 하고 포함되지는 않는 구간도 있을 수 있지만, 그런 것은 많아야 2개다. (점 $g\alpha$를 포함하는 것 하나, 점 $g\alpha'$를 포함하는 것 하나이다.) 따라서 $\{gg_iI_k\}_i$ 중 gU_a와 겹치는 것은 최대 $\eta \cdot N_k$개이다.

같은 이유로 $\{gg_iI_k\}_i$ 중 gU_b에 겹치는 것은 최대 $\eta \cdot N_k$개이고, 따라서 gJ_1에 포함되는 것은 최소 $N(J; I_k) - 2\eta N_k - 4$개이다. 마찬가지 논법을 $\{gg'_iI_k\}_i$에도 적용하면 다음을 얻는다:

$$N\big(gJ_1; I_k\big) \geq N(J; I_k) - 2\eta N_k - 4,$$
$$N\big(gJ_2; I_k\big) \geq N(S^1 \setminus J; I_k) - 2\eta N_k - 4.$$

이제 귀류법을 적용하기 위해 $N(gJ_1; I_k)$가 $N(J; I_k) + 2\eta N_k + 7$ 이상이라고 가정하자. 그러면 gJ_1와 gJ_2는 서로 겹치지 않는 S^1의 부분집합들이므로

$$N_k \geq N\big(gJ_1; I_k\big) + N\big(gJ_2; I_k\big) \geq N(J; I_k) + N(S^1 \setminus J; I_k) + 3 \tag{2.6}$$

임을 얻는다. 이제 이를 구현하는 I_k의 복사본들을 찾자. 즉,

$$u_1I_k, \ldots, u_{N_k}I_k\text{가 서로 겹치지 않게끔 하는 } u_1, \ldots, u_{N_k} \in G$$

를 잡겠다는 것이다. 여기서 J와 $S^1 \setminus J$는 S^1를 정확히 둘로 나누고 그 경계 ∂J는 점 단 두 개로 이루어져 있다. 그말인즉, ∂J의 점을 포함하는 복사본 최대 두 개를 제외한 나머지 u_iI_k들은 반드시 J 혹은 $S^1 \setminus J$ 둘 중 하나에 포함되어 있다는 것이다. 또 u_iI_k들은 서로 겹치지 않게끔 설정되어 있다. 이로부터

$$N(J; I_k) + N(S^1 \setminus J; I_k) \geq N(S^1; I_k) - 2$$

라는 결론에 이르는데, 이는 부등식 2.6에 모순이다.

따라서 귀류법에 의해, $N(gJ_1; I_k)$와 $N(J; I_k)$의 차이는 $2\eta N_k + 6$ 이하이다. 마찬가지 이유로, $N(gJ_2; I_k)$와 $N(S^1 \setminus J; I_k)$의 차이 또한 $2\eta N_k + 6$ 이하이다. 이제 k를 한없이 키움으로써

$$\begin{aligned}
\mu(J) - 2\eta &= \lim_{k \to +\infty} \frac{N(J; I_k) - 2\eta N_k - 6}{N_k} \\
&\leq \lim_{k \to +\infty} \frac{N(gJ_1; I_k)}{N_k} = \mu(gJ_1) \\
&\leq \lim_{k \to +\infty} \frac{N(J; I_k) + 2\eta N_k + 6}{N_k} = \mu(J) + 2\eta
\end{aligned}$$

가 성립한다. 마찬가지 이유로 $\mu(S^1 \setminus J)$와 $\mu(gJ_2)$의 차이는 2η 이하이다. 이로부터

$$\mu(J) - 2\eta \leq \mu(gJ_1) \leq \mu(gJ) = 1 - \mu(S^1 \setminus gJ) \leq 1 - \mu(gJ_2) \leq 1 - \mu(S^1 \setminus J) + 2\eta = \mu(J) + 2\eta$$

를 얻는다. 이 부등식이 임의의 양수 η에 대해 성립하므로 $\mu(J) = \mu(gJ)$라고 결론지을 수 있다. □

Remark 2.34. *한 가지 주의사항으로, 이 증명에서 구성하는 μ가 반드시 Lebesgue 측도에 절대연속한 것은 아니다. 대표적인 예시로 G를 원 위의 회전군으로 잡은 뒤 G의 2진 소수 점들을 각각 (길이가 0이 아닌) 닫힌 구간으로 벌려 주면, G의 또다른 원 작용을 구성할 수 있다. 이 작용은 물론 본래의 회전 작용과 준켤레바꾸기 관계에 있다. 이때 준켤레바꾸기용 단조증가성 차수 1짜리 연속사상을 c*

라고 고정했을 때, 회전작용이 보존하는 Lebesgue 측도를 c로 당겨온 측도 $\mu := c^{-1}\,\mathrm{Leb}$는 G의 본래 작용이 보존하는 측도가 된다. 이 측도 μ에 대해 주장 2.32은 성립하는즉 Lebesgue 측도값이 충분히 작은 구간은 그 μ측도 값도 작지만, 그렇다고 해서 Lebesgue 측도값이 작은 가측 집합의 μ값이 반드시 작은 것은 아니다. 실제로, μ는 Lebesgue 측도 0짜리 Cantor 집합에 받쳐져 있을 수도 있다. (!)

따름정리 2.35. $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 부분 준군 G에 대해, G-불변인 원 위의 확률 측도가 존재하지 않는다고 가정하자. 그러면 어떤 $\epsilon > 0$이 존재하여, 지름 ϵ짜리 구간은 모두 G-축약 가능하다.*

Proof. 가정으로부터 원 위의 각 점의 G-궤도는 모두 무한하다는 것을 알 수 있다. 왜냐하면 유한한 G-궤도가 존재하는 순간 그 궤도 위에 균일하게 뿌려진 이산확률측도는 G에 불변할 수밖에 없기 때문이다. 이제 정리 2.28의 대우를 적용하면 S^1의 각 점이 G-축약 가능한 근방을 가진다는 것을 알 수 있다. 이제 Lebesgue 덮음 보조정리를 사용하여 ϵ을 얻음으로써 증명이 끝난다. □

따름정리 2.36. $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 부분 준군 G에 대해, G-불변인 원 위의 확률 측도가 존재하지 않는다고 가정하자. 더하여, 어떤 닫힌 구간 $[a, b]$가 G-축약 가능하다고 가정하자. 그러면 $[a, b]$는 어떤 G-축약 가능한 열린 구간에 포함되어 있다. 다시 말해, 어떤 $\alpha, \beta \in S^1 \setminus [a, b]$가 존재해 (α, β)가 G-축약 가능하다.*

Proof. 먼저 따름정리 2.35에서 얘기하는 양수 ϵ을 잡자. 이제 만약 닫힌 구간 $[a, b]$가 G-축약 가능하다면, $\mathrm{diam}(g[a, b]) < \epsilon/3$이게끔 하는 G의 원소 g가 존재한다. 이때 g가 연속사상이므로 a, b에 충분히 가까운 점 α, β를 각각 잡으면 $\mathrm{diam}(g[\alpha, \beta]) < \epsilon/2$이게끔 할 수 있다. 그러면 따름정리 2.35에 의해 $g[\alpha, \beta]$ 또한 G-축약 가능하고, $\lim_n \mathrm{diam}(g_n \cdot g[\alpha, \beta]) = 0$이게끔 하는 G의 원소 나열 $\{g_n\}_{n>0}$이 존재한다. 그러면 $\{g_n \cdot g\}_{n>0}$ 또한 G의 원소 나열이고, 또 $[\alpha, \beta]$는 이 원소 나열에 의해 한없이 축약된다. 즉 $[\alpha, \beta]$ 또한 G-축약 가능하기에 증명이 끝난다. □

이제 근접적인 작용에 대한 논의를 시작하겠다.

정의 2.37. $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 부분 준군 G 및 원 위의 점 $x \in S^1$를 생각하자. 이때, 만약 $S^1 \setminus \{x\}$ 안에 포함되는 모든 닫힌 구간이 G-축약 가능하다면, x를 G-밀개(G-repeller)라고 부른다.*

보조정리 2.38. $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 어떤 부분 준군 G의 각 궤도가 무한집합이라고 가정하자. 즉, 임의의 $x \in S^1$에 대해 집합 Gx의 크기가 무한하다는 것이다. 그러면 임의의 유한 집합 A 및 B에 대해, gA와 B가 서로 겹치지 않게끔 하는 G의 원소 g가 존재한다.*

Proof. 점 $x, y \in S^1$에 대해 $Fix(x, y) := \{g \in G : g(x) = y\}$로 정의하자. 우리의 목표는 다음을 증명하는 것이다.

주장 2.39. *그 어떤 자연수 n 및 $\bar{G}$ 안의 유한집합 n개 $S_1, \ldots, S_n \subseteq G^{-1}$, 그리고 점 $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$에 대해서도*

$$G \subseteq \cup_{i=1}^{n} S_i \cdot Fix(x_i, y_i)$$

는 성립할 수 없다.

먼저 $n = 1$일 때를 살펴 보자. 유한집합 $S = \{g_1, \ldots, g_k\} \subseteq G^{-1}$ 및 점 $x, y \in S^1$가 주어졌을 때, $S \cdot Fix(x, y)$의 원소들은 x를 기껏해야 $g_1 y, \ldots, g_k y$ 중 하나로 보내는데, x의 G-궤도는 무한집합이므로 x를 $g_1 y, \ldots, g_k y$ 외의 점으로 보내는 $g \in G$가 반드시 존재한다. 즉, $Fix(x, z) \cap G \neq \emptyset$인 점 $z \notin Sy$가 존재하고, G는 $S \cdot Fix(x, y)$에 포함되지 않는다는 결론을 낼 수 있다.

이제 n에 대한 귀납법을 적용하기 위해,

$$G \subseteq \cup_{i=1}^{n} S_i \cdot Fix(x_i, y_i)$$

를 가정해 보자. 이때 점 y_1의 G-궤도 Gy_1가 무한집합이기에, y_1을 $S_1 y_1$ 밖의 어떤 점 z로 보내는 원소 g가 존재한다. 이 경우, $g \cdot Fix(x_1, y_1)$라는 집합은 $S_1 Fix(x_1, y_1)$와는 결코 겹칠 수 없다. 따라서

$$G \cap \big(g \cdot Fix(x_1, y_1)\big) \subseteq \cup_{i=2}^{n} S_i \cdot Fix(x_i, y_i)$$

가 성립한다. 즉,

$$g^{-1} \cdot G \cap Fix(x_1, y_1) \subseteq \cup_{i=2}^{n} g^{-1} S_i \cdot Fix(x_i, y_i)$$

및 각각의 $s \in S_1$에 대해

$$G \cap sFix(x_1, y_1) \subseteq sg^{-1} G \cap sFix(x_1, y_1) \subseteq \cup_{i=2}^{n} sg^{-1} S_i \cdot Fix(x_i, y_i)$$

가 성립한다. 여기서 첫번째 포함관계가 성립하는 이유는 $G \subseteq sg^{-1} \cdot (gs^{-1}G) \subseteq sg^{-1}G$이기 때문이다. 이로부터

$$\begin{aligned} G &\subseteq \Big(\cup_{s \in S_1} \left(G \cap sFix(x_1, y_1)\right)\Big) \cup \Big(\cup_{i=2}^{n} S_i Fix(x_i, y_i)\Big) \\ &\subseteq \cup_{i=2}^{n} \big(\{sg^{-1}s' : s \in S_1, s' \in S_i\} \cup S_i\big) \cdot Fix(x_i, y_i) \end{aligned}$$

가 성립한다. 물론 이때 각 i에 대해 $\{sg^{-1}s' : s \in S_1, s' \in S_i\} \cup S_i$는 G^{-1}의 유한 부분집합이다. 이로써 $n-1$개의 $Fix(x_i, y_i)$의 복사본 유한 개의 합집합들에 관한 명제로 환원할 수 있고, n에 대해 귀납법을 적용하면 주장의 증명이 끝난다.

이제 보조정리의 명제를 살펴 보면,

$$G \subseteq \cup_{a \in A, b \in B} Fix(a, b)$$

가 성립하지 않는다는 것을 증명하는 것에 다름없다. 이는 주장 2.39로부터 바로 나온다. □

명제 2.40. Homeo(S^1)*의 부분 준군* G*를 생각하자. 만약* G*-밀개인 점* $x \in S^1$*가 존재하고 각각의* G*-궤도가 무한집합이라면,* G*는 서로 겹치지 않는 구간들에 결부된 Schottky 순서쌍을 포함한다.*

Proof. 먼저 x의 열린 근방 기저 $\{I_n\}_{n>0}$을 잡자. 즉 $I_n \searrow \{x\}$가 성립한다. 각각의 n마다, $S^1 \setminus I_n$은 x와 겹치지 않는 닫힌 구간이므로 G-축약 가능하고, 따라서 $\operatorname{diam}(S^1 \setminus g_n I_n) \searrow 0$이게끔 하는 원소 나열 $\{g_n\}_{n>0}$을 잡을 수 있다. 이때 $S^1 \setminus g_n I_n$을 편의상 J_n이라고 표기하자. S^1가 컴팩트 거리공간이므로 집합 나열 $\{J_n\}_n$의 집적점이 하나 존재한다. 이를 y라고 하자. 이때 $\{J_n\}_{n>0}$의 지름이 0으로 줄어들고 있으므로, $\{I_n, g_n, J_n\}_{n>0}$을 적당한 부분 나열로 대체함으로써 J_n이 y로 수렴하게끔, 즉 $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(J_n \cup y) = 0$이 성립하게끔 할 수 있다. 이때 만약 $y = x$인 경우, Gx가 무한집합이므로 $gx \neq x$이도록 하는 적당한 g를 잡아 주자. 이를 이용해 $\{g_n\}_{n>0}$을 $\{g \cdot g_n\}_{n>0}$으로 대체함으로써 $y \neq x$인 경우로 환원할 수 있다. 따라서 이후 $y \neq x$임을 가정하겠다.

이제 보조정리 2.38에 의해 $\{gx, gy\}$와 $\{x\}$가 겹치지 않게끔 하는 $g \in G$가 존재한다. 그말인즉 $x, y, g^{-1}x$는 모두 서로 다른 점이다. 여기에 보조정리 2.38을 한번 더 적용하면, $\{hy\}$와 $\{x, y, g^{-1}x\}$가 겹치지 않게끔 하는 $h \in G$가 존재한다. 즉, $x, y, g^{-1}x, hy$는 모두 서로 다른 점이다. 이때 $hg_n g$는 $S^1 \setminus g^{-1}I_n$를 hJ_n으로 옮기는데, 이때 J_n이 y로 수렴하고 있고 h가 위상동형사상이므로 hJ_n은 hy로 수렴한다. 비슷하게 $g^{-1}I_n$는 $g^{-1}x$로 수렴한다. 또 I_n 및 J_n은 각각 x 및 y로 수렴함을 기억하라. 이 네 극한점들이 모두 서로 다르므로, 충분히 큰 n에 대해 $\overline{I_n}$, $\overline{J_n}$, $\overline{g^{-1}I_n}$, $\overline{hJ_n}$이 모두 서로 떨어져 있게끔 할 수 있다. 그러면 $(g_n, hg_n g)$은 Schottky 순서쌍이 된다. 물론 이 두 원소는 G에 속하므로 증명이 끝난다. □

참고로 Homeo(S^1)의 어떤 부분 준군 G에 대해 만약 G-축약 가능한 구간들의 길이의 상한이 1이라면, G-밀개인 점이 존재할 수밖에 없다. 실제로, G-축약 가능한 구간들 $\{I_n\}_{n>0}$이 $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{diam}(S^1 \setminus I_n) = 0$을 만족한다고 가정하면, $\{I_n\}_{n>0}$을 적당한 부분나열로 대체함으로써 $S^1 \setminus I_n$이 x로 수렴하게끔 할 수 있다. 그러면 x를 포함하지 않는 임의의 닫힌 구간은 어떤 I_n 안에 포함되어 있어야 하고 따라서 G-축약가능하다. 이는 x가 G-끌개라는 뜻이다.

위 내용을 바꾸어 말하면 다음과 같다. Homeo(S^1)의 어떤 부분 준군 G에 대해 만약 G-끌개가 존재하지 않는다면, G-축약 가능한 구간들의 길이의 상한은 1보다 작다. 이제 다음 정의를 살펴보자.

정의 2.41. Homeo(S^1)*의 부분 준군* G*를 생각하되* G*-불변인 확률 측도가 존재하지 않는다고 가정하자. (원 전체가 아닌) 원의 닫힌 구간* $J = [a, b]$*에 대해, 만약 임의의* $c \in (a, b)$*에 대해* $[a, c]$*가* G*-축약 가능하지만* $[a, b]$*는* G*-축약 가능하지 않다면,* J*가* G-단단하다고 *얘기한다.*

불변 확률 측도를 가지지 않는 Homeo(S^1)의 부분 준군 G 및 원의 임의의 점 $x \in S^1$를 고정하고,

$$I := \{y \in S^1 : [x, y]\text{가 } G\text{-축약 가능함}\}$$

를 정의하자. 그러면 $I \setminus \{x\}$의 임의의 원소 y에 대해 $[x, y]$ 안의 모든 점은 역시 I에 속한다는 것을 관찰할 수 있다. 그말인즉 I는 x를 왼쪽 끝점으로 가지는 구간이거나 혹은 원 전체이다. 또 따름정리 2.36에 의해 I는 (원 전체가 아닌 이상) 오른쪽 끝이 열려 있는 반-열린 구간이다. 따라서, I가 만약 원 전체가 아닌 경우 $\bar{I}$는 G-단단한 구간이다.

한편 위 세팅에서 I가 만약 원 전체라면 x는 G-밀개여야 한다. 바꾸어 말하자면, 주어진 G에 대해 만약 G-밀개가 존재하지 않는다면 원 위의 각 점 x는 어떤 G-단단한 구간의 왼쪽 끝점으로 나타난다. 이때 이 G-단단한 구간을 $Firm(x)$로 적자.

보조정리 2.42. *밀개를 가지지 않는* Homeo(S^1)*의 부분 준군* G*를 생각하자. 만약 어떤 두 점* $x, y \in S^1$ *에 대해* $Firm(x)$*이* $[x, y]$*에 포함되고* $Firm(y)$*가* $[y, x]$*에 포함된다면,* x*와* y*는* G*의 작용에 의해 한없이 가까워질 수 없는즉* $\inf_{g\in G} d(gx, gy) > 0$*이 성립한다.*

Proof. 귀류법을 적용하기 위해 $\lim_n d(g_n x, g_n y) = 0$이게끔 하는 G의 원소 나열 $\{g_n\}_{n>0}$이 존재한다고 가정하자. 그러면 $\liminf_n \mathrm{diam}(g_n[x, y]) = 0$ 혹은 $\liminf_n \mathrm{diam}(g_n[y, x]) = 0$ 둘 중 하나는 성립해야 한다. 그러나 전자는 $Firm(x) \subseteq [x, y]$가 G-축약 가능함을 의미하므로 모순이고, 후자는 $Firm(y) \subseteq [y, x]$가 G-축약 가능함을 의미하므로 역시 모순이다. 이로써 증명이 끝난다. □

Homeo(S^1)의 부분 준군 G에 대해 만약 각각의 G-궤도가 무한집합이고 또 G-밀개가 존재한다면, 원 위의 임의의 두 점 x, y는 G의 작용을 통해 한없이 가까워질 수 있다. 먼저, x 혹은 y가 아닌 G-밀개 점이 존재한다면 x와 y가 G의 작용을 통해 작용을 통해 한없이 가까워질 수 있음은 분명하다. 만약 x가 G-밀개인 경우, 보조정리 2.38에 의해 $h^{-1}x \notin \{x, y\}$이게끔 하는 G의 원소 h를 잡을 수 있고, 이제 $h^{-1}x$가 G-밀개임을 이용해 x와 y를 한없이 가깝게 만들 수 있다.

보조정리 2.43. Homeo(S^1)*의 부분 준군* G*를 생각하자. 만약* G*-불변인 원 위의 확률 측도가 존재하지 않고* G*-밀개인 점도 존재하지 않는다면,* $Firm(x)$*이* $[x, y]$*에 포함되고* $Firm(y)$*가* $[y, x]$*에 포함되게끔 하는 점* $x, y \in S^1$*가 존재한다.*

Proof. 귀류법을 적용하기 위해, 임의의 $x, y \in S^1$에 대해 $Firm(x)$이 $[x, y]$에 포함되거나 혹은 $Firm(y)$가 $[y, x]$에 포함된다고 가정해 보자. 이제 다음을 살펴보겠다.

주장 2.44. *원 위의 각 점 $x \in S^1$은 다음을 만족하는 열린 근방 $U = U(x) \ni x$를 가진다. 원 위의 임의의 점 $q \in S^1$에 대해 다음 둘 중 하나가 성립한다:*

(1) 임의의 $p \in U$에 대해 $[p, q]$가 G-축약 가능하다.

(2) 임의의 $p \in U$에 대해 $[q, p]$가 G-축약 가능하다.

Proof. 원 위의 점 $x \in S^1$가 주어졌을 때 $Firm(x) = [x, z]$를 만족하는 점 z를 잡으면, 가정에 의해 $Firm(z)$는 $[z, x]$에 포함되지 않는다. 이는 다시 말해 (x, z) 내부의 점 a가 존재해 $[z, a]$가 G-축약 가능하다는 것이다. 이제 따름정리 2.36에 의해, $[z, a]$ 바깥의 점 z'가 존재해 $[z', a]$ 또한 G-축약 가능하다. 이제 (z', z) 안의 점 z''를 잡으면, z''는 $S^1 \setminus [z, a] \subseteq (x, z)$에 속한다. 따라서 $[x, z'']$는 G-축약 가능하고, 더 나아가 어떤 $x' \in (z'', x) \subseteq (z, x)$가 존재해 $[x', z'']$마저 G-축약 가능하다.

이제 $U = (x', a)$로 잡으면 U는 x를 포함하는 열린 집합이다. 또한, 임의의 점 $q \in S^1$는 $(x', z'']$에 속하거나 혹은 $[z'', a)$에 속한다. 전자일 경우 임의의 $p \in U$에 대해 $[p, q] \subseteq [x', z'']$는 G-축약 가능하고, 후자일 경우 임의의 $p \in U$에 대해 $[q, p] \subseteq [z', a]$가 G-축약 가능하다. 이로써 원하는 성질이 증명되었다. □

이제 원 위의 점 x를 임의로 잡고, x를 왼쪽 끝점으로 공유하면서 $Firm(x)$를 안에서 채워 나가는 구간 나열 I_n을 생각하겠다. 즉, $Firm(x) = [x, z]$, $I_n = [x, z_n]$로 적었을 때 $z_n \in \operatorname{int} Firm(x)$, $\lim_{n \to +\infty} z_n = z$이게끔 잡겠다는 것이다. 그러면 각각의 I_n은 G-축약 가능하므로, $\operatorname{diam}(g_n I_n) < 1/n$이게끔 하는 G의 원소 g_n이 존재한다. 그러면 $\{I_n\}_{n>0}$ 및 $\{g_n\}_{n>0}$을 적당한 부분 나열들로 대체함으로써, $g_n I_n$이 어떤 점 y로 수렴하게끔 할 수 있다.

이제 주장 2.44을 이용해 y의 근방 $U = U(y)$를 잡자. 그러면 충분히 큰 임의의 n에 대해 $g_n I_n$은 $U(y)$에 포함된다. 주장 2.44에서의 U의 성질을 이용하면,

(1) $[x, z_n] \subseteq g_n^{-1} U$의 임의의 점 p에 대해 $g_n[p, z]$가 G-축약 가능하거나, 혹은

(2) $[x, z_n] \subseteq g_n^{-1} U$의 임의의 점 p에 대해 $g_n[z, p]$가 G-축약 가능하다.

전자의 경우, $[x, z] = Firm(x)$가 G-축약 가능하다는 뜻인데 이는 $Firm(x)$의 G-단단함에 모순이다. 따라서 후자만이 가능하고, $[z, z_n]$는 G-축약 가능하다. 이것이 모든 충분히 큰 n에 대해 성립하고 z_n은 z의 왼쪽에서 z로 한없이 다가가므로, G-축약 가능한 구간의 길이 상한이 1이어야만 한다. 이는 G의 밀개 점이 없다는 것에 모순이다. 따라서 귀류법에 의해 보조정리의 명제가 성립한다. □

지금까지의 논의를 요약하면 다음과 같다.

따름정리 2.45. $\operatorname{Homeo}(S^1)$*의 부분 준군 G를 생각하자. 만약 G-불변인 원 위의 확률 측도가 존재하지 않는다면, 다음 두 가능성 중 정확히 하나가 성립한다.*

(1) G의 작용에 의해 한없이 가까워질 수 없는 두 점 $x, y \in S^1$가 존재한다.

(2) G 안에는 서로 겹치지 않는 구간들에 결부된 Schottky 순서쌍이 존재한다.

위 대안들 중 전자가 성립하는 경우, G 위에 받쳐진 무작위 행보를 따라 걸으며 원에 작용해도 x와 y는 결코 일정 거리 이상 가까워질 수 없다. 후자가 성립하는 경우, 2부에서 다음 명제를 증명할 것이다: G의 모든 구석을 지나는 무작위 행보를 따라 걸으면 지수함수적으로 작은 확률을 제외했을 때 x와 y는 지수함수적으로 가까워지며, 이때 이 지수함수의 밑은 x와 y의 선택지에 무관하게 잡을 수 있다. 따라서, G-불변인 확률 측도를 가지지 않는 받침 G 위에서 걸어 가는 무작위 행보에 대해,

(1) 확실하게 가까워지지 않는 두 점이 존재하거나,

(2) 임의의 두 점은 거의 확실하게 지수함수적으로 가까워진다.

이는 Malicet의 결과 [Mal17, Theorem E]을 재확인하는 것이다.

위 대안 중 후자의 경우에도 무작위 행보는 국소적인 지수함수적 축약성을 보인다. 이를 위해서, 구간들에 결부된 Schottky 순서쌍까지는 아니더라도 *열린 구간 유한 개의 합집합*들에 결부된 Schottky 순서쌍을 확보할 필요가 있다. 이는 Margulis가 [Mar00]에서 보인 바 있다. 여기에서 설명하는 증명은 본질적으로 [Mar00]의 논증과 같으며, 다만 측도 공간에서의 수렴을 논하지 않게끔 재편한 것이다.

먼저, 원 위의 구간 유한 개의 합집합 꼴인 집합을 *기초 집합(elementary set)*이라고 부르겠다. 다음은 쉽게 확인할 수 있기에 증명을 생략하겠다.

보조정리 2.46. *양수 ϵ, 기초 집합 $E \subseteq S^1$ 및 구간 나열 $\{F_k\}_{k>0}$를 생각하자. 만약 $F_k \setminus E$의 Lebesgue 측도값이 항상 ϵ보다 크다면, $\{F_k\}_k$의 부분 나열 $\{F_{k(l)}\}_{l>0}$ 및 닫힌 구간 I가 존재하여 $I \setminus E$의 Lebesgue 측도값이 $\epsilon/2$이고, 또 모든 l에 대해 $F_{k(l)}$이 $I \setminus E$를 포함한다.*

증명에 앞서, 불변 확률 측도를 가지지 않는 Homeo(S^1)의 부분 준군 G를 하나 고정하자. 그후 이 따름정리 2.35를 활용해 G를 위한 양수 ϵ을 잡자. 증명의 편의상, ϵ을 살짝 줄임으로써 $N := 1/\epsilon \in \mathbb{Z}_{>0}$임을 가정하자. 그러면 간격 ϵ라는 등간격으로 원 위에 점 N개를 잡을 수 있다. 이때 이웃한 점들이 경계를 이루는 닫힌 구간 N개를 고정하고 각각 $I_1, \ldots, I_N$로 표기하겠다. 즉, $I_1, \ldots, I_N$들은 각각 길이 $1/N = \epsilon$이면서 그 내부들은 서로 겹치지 않는다.

이제 $n = 1, 2, \ldots$ 각각마다 유한 집합 $S_n \subseteq S^1$, 구간 V_n, 기초 집합 $W_n \subseteq S^1$ 및 G의 원소 나열 $\{g_{k;n}\}_{k>0}$을 잡아줄 것이다. 이에 더해 W_0도 잡아줄 것이다. 이들이 $n \geq 1$에 대해 만족할 성질은 다음과 같다:

(1) $V_n \in \{I_1, \ldots, I_N\}$.
(2) $W_0, W_1, \ldots$들은 모두 서로 겹치지 않고, $\mathrm{diam}(W_n) = \frac{1}{2N}(1 - \frac{1}{2N})^{n-1}$이다.
(따라서 $\mathrm{diam}(W_0 \sqcup \ldots \sqcup W_n) = 1 - (1 - \frac{1}{2N})^{n+1}$이다.)
(3) 모든 k에 대해 $g_{k;n}(W_n) \subseteq V_n$가 성립한다.
(4) k가 커짐에 따라 $g_{k;n}(W_0 \sqcup \ldots \sqcup W_{n-1}) \to S_n$가 성립한다.
즉, 임의의 η가 주어졌을 때 $g_{k;n}(W_0 \sqcup \ldots \sqcup W_{n-1}) \subseteq$ (S_n의 η-근방)이 모든 충분히 큰 k에 대해 성립한다.

시작 케이스인 $n = 1$을 논하겠다. 길이 $1/2N$짜리 구간 중 아무 것이나 뽑아 W_0라고 이름붙이자. 그러면 W_0는 지름이 $1/2N = \epsilon/2$이기 때문에 G-축약 가능하고, $\mathrm{diam}(g_k W_0) \to 0$이게끔 하는 원소 나열 $\{g_k\}_{k>0}$이 존재한다. 이때 $\{g_k\}_{k>0}$을 적당한 부분 나열로 대체함으로써, $g_k W_0$이 어떤 점 x_1로 수렴하게끔 할 수 있다. 이 x_1를 S_1이라고 정의하겠다. 한편, 각각의 k에 대해

$$g_k^{-1}(I_1) \setminus W_0,\ g_k^{-1}(I_2) \setminus W_0,\ \ldots,\ g_k^{-1}(I_N) \setminus W_0$$

중 가장 Lebesgue 측도값이 큰 것이 $l(k)$번째 것이라고 했을 때, 그 Lebesuge 측도값은 $\frac{1}{N}(1-\mathrm{diam}(W_0))$ 이상이다. 또 $l(k)$는 $\{1, \ldots, N\}$라는 유한집합 안에서 잡힌다는 것에 유의하라. 따라서 $\{g_k\}_{k>0}$을 더욱 적당한 부분 나열로 대체함으로써, $l(1), l(2), \ldots$가 모두 동일한 숫자이도록 할 수 있다. 이때 $I_{l(1)} = I_{l(2)} = \ldots$를 V_1로 정의하겠다. 보조정리 2.46을 적용하여 또 한번 부분 나열로 대체하면 다음이 성립하게끔 할 수 있다: Lebesgue 측도 $\frac{1}{2N}(1 - \mathrm{diam}(W_0))$인 기초 집합 $W_1 \subseteq S^1 \setminus W_0$가 존재해 임의의 k에 대해 $g_k^{-1}(V_1) \setminus W_0$가 W_1를 포함한다. 이렇게 최종적으로 결정된 $\{g_k\}_{k>0}$을 $\{g_{k;1}\}_{k>0}$로 삼겠다. 그러면 $n = 1$에 대해 원하는 결론이 모두 성립한다.

이제 $n - 1$에 대한 결론을 가정하고 n에 대한 가정을 이끌어 내겠다. 먼저 V_{n-1}는 지름이 ϵ이기 때문에 G-축약 가능하고, $\mathrm{diam}(h_k V_{n-1}) \to 0$이게끔 하는 원소 나열 $\{h_k\}_{k>0}$이 존재한다. $\{g_k\}_{k>0}$

을 적당한 부분 나열로 대체함으로써 집합 나열 h_kV_{n-1}이 어떤 점 x_n로 수렴하게끔 할 수 있다. 또 더 적당한 부분 나열로 대체하면, 크기 $\#S_{n-1}$짜리 유한 집합의 나열인 $\{h_kS_{n-1}\}_{k>0}$이 어떤 유한집합 S'로 수렴하게끔 할 수 있다. 이때 $S_n := S' \cup \{x_n\}$로 정의하겠다. 이제 각각의 k에 대해 충분히 큰 $l(k)$를 잡으면 $h_kg_{l(k);n-1}(W_0 \sqcup \ldots \sqcup W_{n-2})$는 h_kS_{n-1}에 원하는 만큼 가깝도록 할 수 있고, $h_kg_{l(k);n-1}W_{n-1} \subseteq h_kV_{n-1}$ 또한 성립한다. 이러한 선택지를 바탕으로 $\{g_k := h_kg_{l(k);n-1}\}_{k>0}$이라는 원소 나열을 만들면 $g_k(W_0 \sqcup \ldots \sqcup W_{k-1})$는 k가 커짐에 따라 S_n으로 수렴한다.

한편 각각의 k에 대해

$$g_k^{-1}(I_1) \setminus (W_0 \sqcup \ldots \sqcup W_{n-1}),\, g_k^{-1}(I_2) \setminus (W_0 \sqcup \ldots \sqcup W_{n-1}),\, \ldots,\, g_k^{-1}(I_N) \setminus (W_0 \sqcup \ldots \sqcup W_{n-1})$$

중 가장 Lebesgue 측도값이 큰 것이 $l(k)$번째 것이라고 했을 때, 그 Lebesuge 측도값은 $\frac{1}{N}(1-\mathrm{diam}(W_0 \sqcup \ldots \sqcup W_{n-1}))$ 이상이다. 또 $l(k)$는 $\{1, \ldots, N\}$라는 유한집합 안에서 잡힌다는 것에 유의하라. 따라서 $\{g_k\}_{k>0}$을 더욱 적당한 부분 나열로 대체함으로써, $l(1), l(2), \ldots$가 모두 동일하도록 할 수 있다. 이때 $I_{l(1)} = I_{l(2)} = \ldots$를 V_n로 정의하겠다. 보조정리 2.46을 적용하여 또 한번 부분 나열로 대체하면 다음이 성립하게끔 할 수 있다: Lebesgue 측도 $\frac{1}{2N}\big(1 - \mathrm{diam}(W_0 \sqcup \ldots \sqcup W_{n-1})\big)$인 기초 집합 $W_n \subseteq S^1 \setminus (W_0 \sqcup \ldots \sqcup W_{n-1})$가 존재해 임의의 k에 대해 $g_k^{-1}(V_n) \setminus (W_0 \sqcup \ldots \sqcup W_{n-1})0$가 W_n를 포함한다. 이렇게 최종적으로 결정된 $\{g_k\}_{k>0}$을 $\{g_{k;n}\}_{k>0}$로 삼으면, 원하는 결론이 모두 성립한다.

이제 성질 (1), (2), (3), (4)를 만족하는 $S_n, V_n, W_n, \{g_{k;n}\}_{k>0}$이 각각의 n에 대해 구성되었다. 다시 말해, 각 n마다 기초 집합 $K_n (:= W_0 \sqcup \ldots \sqcup W_{n-1})$, 유한 집합 $S_n \subseteq S^1$ 및 G의 원소 나열 $\{g_{k;n}\}_{k>0}$이 존재하여 k가 한없이 커질 때 $g_{k;n}K_n \to S_n$이고, 또 $\mathrm{Leb}(K_n) = 1 - (1 - \frac{1}{2N})^{n+1}$가 성립한다는 것을 관찰했다. (이제 V_n의 성질은 잊어도 된다.)

다만, 유한 집합 S_n의 크기에 대해서는 별다른 제약을 두지 않았는데, K_n은 그대로 두되 원소 나열 $\{g_{k;n}\}_{k>0}$을 다르게 선택함으로써 S_n의 크기를 N 이하이게끔 할 수 있다. 이를 위해 $\#S_n > N$임을 가정하자. 그러면 $I_1, \ldots, I_N$ 중 적어도 하나는 S_n의 점 두 개 이상을 포함하고 있다. 일반성을 잃지 않고 I_1이 그러하다고 해 보자. 길이가 ϵ인 I_1은 G-축약 가능하므로 $\mathrm{diam}(g_kI_1) \to 0$이게끔 하는 원소 나열 $\{g_k\}_{k>0}$이 존재하며, 적당한 부분 나열로 대체함으로써 g_kI_1이 어떤 점 x로 수렴한다고 가정할 수 있다. 더하여, $\{g_k(S_n \setminus I_1)\}_{k>0}$는 원소 개수 $\#S_n - 2$ 이하인 유한집합들의 나열이고, 여기서 부분 나열을 뽑아 대체함으로써 $g_k(S_n \setminus I_1)$가 k가 커짐에 따라 어떤 유한집합 S'로 수렴한다고 가정할 수 있다. 이때 S'의 크기는 $\#S_n - 2$를 넘을 수 없다. 이제 $S'_n := S' \cup \{x\}$로 두면 $g_kS_n \to S'_n$가 성립한다. 또한 각각의 k에 대해 충분히 큰 $l(k)$를 잡으면 $g_kg_{l(k);n}(W_0 \sqcup \ldots \sqcup W_{n-1})$가 g_kS_n에 원하는 만큼 가깝도록 할 수 있다. 이러한 선택지를 이용해 $\{g_kg_{l(k);n}\}_{k>0}$라는 원소 나열을 고려하면 $g_kg_{l(k);n}(W_0 \sqcup \ldots \sqcup W_{n-1})$는 S'_n으로 수렴하는데, 이때 S'_n는 S_n보다 원소가 한 개 이상 적다. 이 과정을 귀납적으로 반복하면 S_n의 크기를 N 이하로 줄일 수 있다. 이를 고려하여, 각각의 n에 대해 $\#S_n \le N$임을 가정해도 무방하다.

이제 위 선택지 $(K_n, S_n, \{g_{k;n}\}_{k>0})_{n>0}$의 부분 나열을 잡음으로써, 집합 나열 S_n이 어떤 유한 집합 S로 수렴함을 가정할 수 있다. (바로 이것이 $\#S_n$의 균일한 통제가 필요한 이유다.)

이제 충분히 작은 양수 η를 잡고, S의 각 점을 중심으로 반지름 η짜리 구간을 그린 뒤 합한 집합을 $S^{(\eta)}$라고 적자. 그러면 임의의 충분히 큰 n에 대해 $S^{(\eta)}$는 S_n의 열린 근방이 되고, 충분히 큰 $k(n)$에 대해 $g_{k(n);n}(K_n) \subseteq S^{(\eta)}$가 성립한다. 즉, $L_n := g_{k(n);n}^{-1}(S^1 \setminus S^{(\eta)})$는 Lebesgue 측도 $1 - \mathrm{Leb}(K_n)$ 이하인 기초 집합이 된다. 실은 이 집합은 닫힌 구간 $\#S$개로 이루어져 있고, 각 닫힌 구간의 길이는 $1 - \mathrm{Leb}(K_n)$를 넘지 않는다. L_n의 각 구간의 중점들을 모은 크기 $\#S$개짜리 집합을 C_n이라고 하자. 그러면 역시 부분 나열을 잡음으로써, n이 커짐에 따라 C_n이 어떤 유한집합 C로 수렴한다고 가정할 수 있다. 이때 L_n은 C_n의 $1 - \mathrm{Leb}(K_n)$-열린 근방 안에 있으므로, 충분히 큰 n에 대해 L_n은 C의 η-근방에

포함된다. 다시 말해, 충분히 큰 n 및 그에 따른 충분히 큰 $k(n)$에 대해 $g_{k(n);n}$은 C의 η-근방의 여집합을 S의 η-근방 안으로 보내고, $g_{k(n);n}^{-1}$는 S의 η-근방의 여집합을 C의 η-근방의 여집합 안으로 보낸다.

이제 보조정리 2.38을 이용해 $g(C\cup S)$와 C가 겹치지 않게끔 하는 $g \in G$를 잡고, 또 hS와 $C\cup S\cup g^{-1}C$가 겹치지 않게끔 하는 $h \in G$를 잡자. 그러면 C, S, $g^{-1}C$, hS는 모두 서로 떨어져 있는 유한집합이고, 따라서 $N_\eta(C), N_\eta(S), g^{-1}N_\eta(C)$, $hN_\eta(S)$ 모두 서로 떨어져 있게끔 충분히 작은 양수 η를 잡을 수 있다. 이 η에 대해 위에서 관찰한 바와 같이 $g_{k(n);n}$를 잡을 수 있다. 그러면 $(g_{k(n);n}, hg_{k(n);n}g)$는 $N_\eta(C), N_\eta(S), g^{-1}N_\eta(C)$, $hN_\eta(S)$에 결부된 G 안의 Schottky 순서쌍이 되는데, 이 네 집합 각각은 분명히 구간 유한 개의 합집합이다. 이로써 증명이 끝난다.

3. 응용: 무작위 행보의 지수함수적 축약성 및 확률론적인 Tits 대안

.

이 절에서는 기존에 알려진 결과를 약간 더 확장한 버전을 논하기에, 설명문을 영어로 달아 둔다. (이하 영문)

We study two consequences of the weak Tits alternative of Margulis' and Ghys' weak Tits alternative on Homeo(S^1). These consequences are concerned with random walks on Homeo(S^1), and were proven earlier by Martín Gilabert Vio and Dominque Malicet, respectively. Our purpose is to give a different approach that gives an additional quantitative bound. This quantitative bound is stable under perturbation of the underlying measure for the random walk.

Let us introduce a terminology: given a (Borel) probability measure μ on Homeo(S^1), there exists the smallest closed subset of Homeo(S^1) whose complement has zero μ-hitting measure. This closed subset is necessarily a subsemigroup (say G) of Homeo(S^1), and we say that μ is *non-degenerate* on G. Let us denote the support of μ by $\operatorname{supp}\mu$, which is the smallest closed subset of Homeo(S^1) whose complement has zero μ-value. Then G is the semigroup generated by $\operatorname{supp}\mu$. For this reason, we sometimes denote G by $\langle\langle \operatorname{supp}\mu \rangle\rangle$.

To begin with, we recall the following theorem recently proven by Martín Gilabert Vio:

정리 3.1 ([GV24, Theorem A])**.** *Let μ_1, μ_2 be nondegenerate probability measures on $\mathrm{Diff}_+^1(S^1)$ such that the actions of $G_1 = \langle\langle \operatorname{supp}\mu_1 \rangle\rangle$ and of $G_2 = \langle\langle \operatorname{supp}\mu_2 \rangle\rangle$ are proximal, and such that for every $i = 1, 2$, either*

(1) the support of μ_i is finite, or
(2) the support of μ_i is included in $\mathrm{Diff}_+^{1+\tau}(S^1)$ for some $\tau \in (0,1)$ and the integrals

$$\int_{G_i} \max\left\{|g|_{Lip}, |g^{-1}|_{Lip}\right\}^\delta \, d\mu(g), \int_{G_i} |\log g'|_\tau \, d\mu(g),$$

are finite for some $\delta > 0$.

Let $(Z_n)_{n>0}$ and $(Z'_n)_{n>0}$ be independent (left) random walks generated by μ_1 and μ_2, respectively. Then there exists $q \in (0,1)$ such that

$$\mathbb{P}\left(Z_n \text{ and } Z'_n \text{ comprise a ping-pong pair}\right) \geq 1 - q^n$$

for all $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

We have not defined a ping-pong pair, which will come shortly after. For now, it suffices to know that ping-pong pairs in Homeo(S^1) generates a free subgroup. As a consequence of this exponential bound, Gilabert Vio proved that independent random walks eventually generate free subgroups almost surely.

The above Theorem 3.1 is concerned with random diffeomorphisms in a subgroup with proximal action. A companion result for more general homeomorphisms is as follows.

정리 3.2 ([GV24, Theorem C]). *Let μ_1, μ_2 be nondegenerate probability measures on $\mathrm{Homeo}^1_+(S^1)$ such that the actions of $G_1 = \langle\langle \operatorname{supp} \mu_1 \rangle\rangle$ and of $G_2 = \langle\langle \operatorname{supp} \mu_2 \rangle\rangle$ do not admit invariant probability measure. Let $(Z_n)_{n>0}$ and $(Z'_n)_{n>0}$ be independent (left) random walks generated by μ_1 and μ_2, respectively. Then the following holds almost surely:*

$$\lim_{N\to\infty} |\{0 \le n \le N \mid Z_n \text{ and } Z'_n \text{ comprise a ping-pong pair}\}| = 1.$$

Our first result is that one can describe exponential genericity of ping-pong pairs for independent random walks on $\mathrm{Homeo}(S^1)$.

Theorem A. *Let μ_1 and μ_2 be nondegenerate probability measures on $\mathrm{Homeo}(S^1)$ such that the actions of $G_1 = \langle\langle \operatorname{supp} \mu_1 \rangle\rangle$ and of $G_2 = \langle\langle \operatorname{supp} \mu_2 \rangle\rangle$ do not admit invariant probability measure. Let $(Z_n)_{n>0}$ and $(Z'_n)_{n>0}$ be independent random walks generated by μ_1 and μ_2, respectively. Then the following holds almost surely: Then there exists $\kappa > 0$ such that*

$$\mathbb{P}\left(Z_n \text{ and } Z'_n \text{ comprise a ping-pong pair}\right) \ge 1 - \frac{1}{\kappa} e^{-\kappa n} \tag{3.1}$$

for all $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Furthermore, the coefficient κ is stable under perturbation in the following sense: there exist neighborhoods $\mathcal{U}_1$ of μ_1 and $\mathcal{U}_2$ of μ_2 in the space of probability measures on $\mathrm{Homeo}(S^1)$ (in the weak-$*$ topology), respectively, so that Inequality 3.1 holds even if $(Z_n)_{n>0}$ is driven by an arbitrary measure in $\mathcal{U}_1$ and $(Z'_n)_{n>0}$ is driven by an arbitrary measure in $\mathcal{U}_2$.

Let us now recall the exponential synchronizing proven by Dominique Malicet.

정리 3.3 ([Mal17, Theorem A]). *Let μ be a probability measure on $\mathrm{Homeo}(S^1)$ such that the action of $G = \langle\langle \operatorname{supp} \mu \rangle\rangle$ does not admit invariant probability measure. Let $(Z_n)_{n>0}$ be independent (left) random walks generated by μ. Then there exists $q \in (0,1)$ such that for each $x \in S^1$, for almost every random path $(Z_n(\omega))_{n>0}$, there exists a neighborhood $I_{x,\omega}$ of x such that*

$$\operatorname{diam}\left(Z_n(\omega)(I)\right) \le q^n$$

for all $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Our second result strengthens this result by providing an exponential bound on the error event:

Theorem B. *Let μ be a nondegenerate probability measure on $\mathrm{Homeo}(S^1)$ such that the action of $G = \langle\langle \operatorname{supp} \mu \rangle\rangle$ does not admit invariant probability measure. Let $(Z_n)_{n>0}$ be independent (left) random walks generated by μ. Then there exists $\kappa > 0$ such that for each $x \in S^1$,*

$$\mathbb{P}\left(\omega : \begin{array}{c} \text{there exists a neighborhood } I_{x,\omega} \text{ of } x \text{ such that} \\ \operatorname{diam}\left(Z_k(\omega)(I_{x,\omega})\right) \le q^k \text{ for } k \ge n \end{array}\right) \ge 1 - \frac{1}{\kappa} e^{-\kappa n} \tag{3.2}$$

for all $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Furthermore, the coefficient κ is stable under perturbation. That means, there exists a neighborhood $\mathcal{U}$ of μ in the space of probability measures on $\mathrm{Homeo}(S^1)$ *(in the weak-$*$ topology) so that Inequality 3.2 holds (for the same uniform $\kappa > 0$) even if $(Z_n)_{n>0}$ is driven by an arbitrary measure in $\mathcal{U}$.*

This theorem follows from the special case where the action of G is proximal. In such a case, one can give more description about $I_{x,\omega}$:

Theorem C. *Let μ be a nondegenerate probability measure on* $\mathrm{Homeo}(S^1)$ *such that the action of $G = \langle\langle\, \mathrm{supp}\,\mu \,\rangle\rangle$ is proximal. Let $(Z_n)_{n>0}$ be the (left) random walk generated by μ. Then there exists $\kappa > 0$ such that for each $x \in S^1$,*

$$\mathbb{P}\left(\omega : \begin{array}{c} \text{there exists a neighborhood } I_{x,\omega} \text{ of } x \text{ such that} \\ \mathrm{diam}(I_{x,\omega}) \geq 1 - q^n \text{ and } \mathrm{diam}\left(Z_k(\omega)(I_{x,\omega})\right) \leq q^k \big) \text{ for } k \geq n \end{array}\right) \geq 1 - \frac{1}{\kappa}e^{-\kappa n} \tag{3.3}$$

for all $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Furthermore, the coefficient κ is stable under perturbation. That means, there exists a neighborhood $\mathcal{U}$ of μ in the space of probability measures on $\mathrm{Homeo}(S^1)$ *(in the weak-$*$ topology) so that Inequality 3.2 holds (for the same uniform $\kappa > 0$) even if $(Z_n)_{n>0}$ is driven by an arbitrary measure in $\mathcal{U}$.*

Remark 3.4. *In Theorem B and C, it is important that the choice of $I_{x,\omega}$* depends on *$I_{x,\omega}$. It is easy to construct a random walk (say, a nearest-neighbor random walk on a surface group acting on $S^1 = \partial\mathbb{H}^2$) such that for any nonempty open set O, there exists $\epsilon > 0$ such that*

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{diam}(Z_n \cdot O) > 1/2\right) > \epsilon$$

for each $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

The statements in Theorem A, B, C still hold even if the the step distributions for the random walk are independent but non-identical, as long as they are distributed according to measures chosen from $\mathcal{U}$ or $\mathcal{U}_1$ and $\mathcal{U}_2$, respectively.

We finally observe one another result for proximal actions.

Theorem D. *Let μ be a nondegenerate probability measure on* $\mathrm{Homeo}(S^1)$ *such that the action of $G = \langle\langle\, \mathrm{supp}\,\mu \,\rangle\rangle$ is proximal. Let $(Z_n)_{n>0}$ be the random walk generated by μ. Then there exists $\kappa > 0$ such that for each $x, y \in S^1$,*

$$\mathbb{P}_{Z_n \sim \mu^{*n}}\left(d(Z_n x, Z_n y) < e^{-\kappa n}\right) \geq 1 - \frac{1}{\kappa}e^{-\kappa n} \tag{3.4}$$

for all $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Furthermore, the coefficient κ is stable under perturbation. That means, there exists a neighborhood $\mathcal{U}$ of μ in the space of probability measures on $\mathrm{Homeo}(S^1)$ *(in the weak-$*$ topology) so that Inequality 3.2 holds (for the same uniform $\kappa > 0$) even if $(Z_n)_{n>0}$ is driven by an arbitrary measure in $\mathcal{U}$.*

In Theorem A or D, it is not important if the random walk is a right random walk or left random walk. Indeed, the estimate is a snapshot at step n. In Antonov's work and Malicet's work [Mal17], the authors mainly discussed exponential synchronization for left random walk.

Our results are purely for homeomorphism groups. The only property of the group element that we use is the following: If I and J are nested intervals of S^1, their images are also nested.

Our method is based on Gouëzel's pivoting technique, which is first introduced in [Gou22] and led to a remarkable exponential estimate for random walks on Gromov hyperbolic spaces. There has been several attempts to generalize Gouëzel's technique to a broader setting, and this paper is in line with those efforts. We use Schottky dynamics exhibited by Schottky pairs of homeomorphisms to implement Gouëzel's pivoting time construction. It turns out that the 1-dimensionality of the ambient space is somehow crucial, but the more crucial thing is the nesting of the Schottky regions. For instance, the particular choice of Lebesgue measure (when measuring the diameter of intervals) is not important; we have:

정리 3.5. *The statement in Theorem B and C hold even if the diameter* $\operatorname{diam}(\cdot)$ *is replaced with* $\nu(\cdot)$ *for an arbitrary probability measure* ν *on* S^1.

So above, ν need not be absolutely continuous with respect to Leb, but could be e.g., a measure concentrated on a Cantor set or as such.

For now, we will prove a weaker version of Theorem A, B, 3.5. In particular, we will assume that the subsemigroup $\langle\langle \operatorname{supp}\mu \rangle\rangle$ generated by the support of μ is in fact a subgroup of $\operatorname{Homeo}(S^1)$. That way, we can appeal to Theorem 2.1 and 2.2. The general case when $\langle\langle \operatorname{supp}\mu \rangle\rangle$ is not a subgroup but only a subsemigroup can be dealt with by means of Theorem 2.3 and 2.4. The generalization is not that hard, which requires pivoting technique in terms of finite unions of intervals instead of intervals. For brevity, we will stick to the weaker cases.

3.1. $\operatorname{Homeo}(S^1)$ **위의 확률 측도와 Schottky 집합** $\operatorname{Homeo}(S^1)$에는 흔히 (컴팩트-열림 위상과 동일한) C^0-위상을 주는데, 이 위상 구조에 대해 $\operatorname{Homeo}(S^1)$는 폴란드 공간(Polish space) 및 위상군(topological group)이 된다. 그러면 $\operatorname{Homeo}(S^1)$ 위의 확률 측도들의 모임에 약한 위상을 줄 수 있다. 이는 $\operatorname{Homeo}(S^1)$ 위의 유계인 연속 함수 f 및 실수 $a < b$에 대해

$$\left\{ \mu : a < \int_{\operatorname{Homeo}(S^1)} f \, d\mu < b \right\}$$

형태인 측도 집합들을 위상 구조의 기저로 삼겠다는 것이다.

앞으로 논할 $\operatorname{Homeo}(S^1)$ 위의 측도는 모두 (컴팩트-열림 위상 구조에 대한) Borel 측도이다. $\operatorname{Homeo}(S^1)$ 위의 측도 μ 및 ν가 주어졌을 때 그 *합성곱(convolution)*을

$$(\mu * \nu)(A) := (\mu \times \nu)\left(\left\{(g,h) \in \left(\operatorname{Homeo}(S^1)\right)^2 : gh \in A\right\}\right)$$

과 같이 정의할 수 있다. 또한, μ의 n번 자기합성곱 $\mu * \cdots * \mu$를 μ^{*n}으로 줄여 쓰겠다. 그리고 $\mu(K) = 1$을 만족하는 $\operatorname{Homeo}(S^1)$의 닫힌 집합 K 중 가장 작은 것을 μ의 *받침(support)*이라고 부르고 $\operatorname{supp}\mu$로 표기하겠다. 그러면 $\operatorname{Homeo}(S^1)$의 원소 g에 대해, g가 $\operatorname{supp}\mu$에 포함될 필요충분조건은 g의 임의의 근방이 항상 0보다 큰 μ-값을 가진다는 것이다.

정의 3.6. *원의 자기위상동형사상 f 및 원 위의 서로 겹치지 않는 부분집합 U_1, U_2을 생각하자. 만약*

$$f\big(S^1 \setminus U_1\big) \subseteq U_2,\ f\big(S^1 \setminus U_2\big) \subseteq U_1$$

가 성립하면, f를 (U_1, U_2)-쌍곡적인 위상동형사상이라고 부른다. 또, (U_1, U_2)-쌍곡적인 위상동형사상의 집합을 $\mathfrak{S}(U_1, U_2)$로 표기한다.

만약 U_1 및 U_2가 열린 집합이라면 $\mathfrak{S}(U_1, U_2)$ 또한 열린 집합이고, 둘이 닫힌 집합이라면 $\mathfrak{S}(U_1, U_2)$ 또한 닫힌 집합임을 관찰할 수 있다.

정의 3.7. *서로 겹치지 않는 원 위의 닫힌 구간 $I_1, \ldots, I_N, J_1, \ldots, J_N$에 대해 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 부분집합 $S := \mathfrak{S}(I_1, J_1) \cup \ldots \cup \mathfrak{S}(I_N, J_N)$를 $(I_1, \ldots, I_N, J_1, \ldots, J_N$에 결부된) Schottky 집합이라고 부른다. 이때 N을 S의 분해능(resolution)이라고 부른다. 각각의 $s \in S$마다 $s \in \mathfrak{S}(I_i, J_i)$이게끔 하는 I_i 및 J_i가 유일하게 결정되는데, 이들을 각각 $I(s)$ 및 $J(s)$라고 적겠다.*

만약 어떤 구간 $\mathcal{I}$이 존재해 $I_1 \cup \ldots \cup I_N \subseteq \mathrm{int}(S^1 \setminus \mathcal{I})$ 및 $J_1 \cup \ldots \cup J_N \subseteq \mathrm{int}\,\mathcal{I}$가 성립한다면 $\mathcal{I}$를 S의 중선(median)이라고 부른다.

양수 $\epsilon > 0$ 및 서로 겹치지 않는 닫힌 구간 $I_1, \ldots, I_N, J_1, \ldots, J_N$에 결부된 Schottky 집합 S를 생각하자. 이때,

$$i = 1, \ldots, N\text{마다 } \mu\big(\mathfrak{S}(I_i, J_i)\big) > \epsilon/N$$

을 만족하는 $\mathrm{Homeo}(S^1)$상의 측도 μ를 (S, ϵ)-맞춤 측도라고 부르고,

$$i = 1, \ldots, N\text{마다 } \mu\big(\mathfrak{S}(I_i, J_i)\big) = 1/N$$

을 만족하는 $\mathrm{Homeo}(S^1)$상의 측도 μ는 S 위에서 Schottky-균일하다고 말한다.

보조정리 3.8. $\mathrm{Homeo}(S^1)$ *위의 확률 측도 μ를 생각하자. 만약 $\mathrm{supp}\,\mu$가 Schottky 순서쌍을 하나 포함하고 있다면, 임의의 양의 정수 N가 주어질 때마다 $\epsilon > 0$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 및 중선 달린 분해능 N짜리 Schottky 집합 S가 존재해 μ^{*m}이 (S, ϵ)-맞춤 측도가 된다.*

Proof. 가정에 의해, $\mathrm{supp}\,\mu$는 Schottky 순서쌍 $\{f_1, f_2\}$을 하나 포함한다. 이는 다시 말해, 서로 겹치지 않는 원 위의 닫힌 구간 I_1, I_2, J_1, J_2이 존재해 $f_i \in \mathfrak{S}(I_i, J_i)$가 성립한다는 뜻이다.

여기서 I_i, J_i의 배치에 따라 경우를 나눌 수 있다. 만약 $I_1 \cup I_2 \subseteq \mathcal{I}$ 및 $J_1 \cup J_2 \subseteq S^1 \setminus \mathcal{I}$이게끔 하는 닫힌 구간 $\mathcal{I}$가 존재한다면, 이 $\mathcal{I}$를 기록해 두겠다. 그렇지 않은 경우, I_1, J_1, I_2, J_2는 순서대로 시계방향 혹은 반시계방향으로 배치되어 있다. 어느 경우이건, J_2를 포함하되 I_1, J_1 및 I_2와는 겹치지 않는 구간을 하나 잡아 $\mathcal{I}$로 쓰겠다. 이는 $\{f_1, f_2\}$용 중선으로 볼 수는 없지만, $\{f_2^2, f_2 f_1\}$용 중선으로 볼 수 있다. 실제로

$$f_1' := f_2 f_1,\ f_2' := f_2^2,\ I_1' := I_1,\ J_1' := f_2 J_1,\ I_2' := I_2,\ J_2' := f_2 J_2$$

에 대해 $f_i(S^1 \setminus I_i') \subseteq J_i', f_i^{-1}(S^1 \setminus J_i') \subseteq I_i'$가 성립함은 물론,

$$J_1' \cap J_2' = f_2(J_1 \cap J_2) = \emptyset,\ (I_1' \cup I_2') \cap (J_1' \cup J_2') \subseteq (I_1 \cup I_2) \cap f_2(S^1 \setminus I_2) \subseteq (I_1 \cup I_2) \cap J_2 = \emptyset$$

이 성립한다. 더하여, $\mathcal{I}$는 I_1, I_2와 만나지 않는 한편 $\mathrm{int}\,\mathcal{I}$는 $\mathrm{int}\,J_2$의 부분집합인 J_1' 및 J_2'도 포함한다. 따라서 이러한 $\mathcal{I}$는 $\{f_1', f_2'\}$용 중선으로 볼 수 있다. 여기서 $f_1', f_2' \in \mathrm{supp}\,\mu^{*2}$임에 주목하라.

위의 논의를 비추어 보았을 때, 필요하다면 μ^{*2}로 μ를 갈음함으로써, 서로 겹치지 않는 닫힌 구간 I_1, I_2, J_1, J_2에 결부된 Schottky 순서쌍 $\{f_1, f_2\}$는 (닫힌) 중선 $\mathcal{I}$를 가진다고 가정할 수 있다. 이제

$\{1,2\}^N$의 원소들을 꼬리표 삼아 위상동형사상 2^N개를 나열하려고 한다. 그말인즉 $\sigma \in \{1,2\}^N$가 주어질 때마다

$$f_\sigma := f_{\sigma(1)} f_{\sigma(2)} \cdots f_{\sigma(N)},\ I_\sigma := f_\sigma^{-1}\left(\overline{S^1 \setminus \mathcal{I}}\right),\ J_\sigma := f_\sigma \mathcal{I}$$

를 정의하면, f_σ^2는 $S^1 \setminus I_\sigma$를 J_σ 안으로 보내고 f_σ^{-2}는 $S^1 \setminus J_\sigma$를 I_σ로 안으로 보낸다. 또한,

$$\begin{aligned} J_\sigma &= f_{\sigma(1)} \cdots f_{\sigma(N)} \mathcal{I} = f_{\sigma(1)} \cdots f_{\sigma(N-1)} J_{\sigma(N)} \\ &\subseteq f_{\sigma(1)} \cdots f_{\sigma(N-1)} \mathcal{I} = f_{\sigma(1)} \cdots f_{\sigma(N-2)} J_{\sigma(N-1)} \\ &\subseteq \ldots \subseteq J_{\sigma(1)} \subseteq \operatorname{int} \mathcal{I} \end{aligned}$$

가 성립한다. 비슷한 이유로 $I_\sigma \subseteq \operatorname{int}(S^1 \setminus \mathcal{I})$가 성립한다. 이는 곧 임의의 $\sigma, \sigma' \in \{1,2\}^N$에 대해 I_σ와 $J_{\sigma'}$는 겹치지 않는다는 뜻이기도 하다. 이제 $\{1,2\}^N$의 *서로 다른* 두 원소 σ 및 σ'를 생각하자. 그러면 $\sigma(i) \neq \sigma'(i)$인 정수 i가 반드시 존재하며, 그런 정수 중 가장 작은 것을 잡겠다. 그러면

$$J_\sigma \subseteq f_{\sigma(1)} \cdots f_{\sigma(i-1)} J_{\sigma(i)},\ J_{\sigma'} \subseteq f_{\sigma'(1)} \cdots f_{\sigma'(i-1)} J_{\sigma'(i)}$$

는 서로 겹치지 않음을 확인할 수 있다. 비슷한 이유로, I_σ와 $I_{\sigma'}$도 겹치지 않는다. 요약하자면, 우리는 서로 겹치지 않는 닫힌 구간 $2 \cdot 2^N$개 $\{I_\sigma, J_\sigma : \sigma \in \{1,2\}^N\}$을 설계했는데, $(\operatorname{supp} \mu^{*N})$은 각각의 $\mathcal{S}(I_\sigma, J_\sigma)$와 겹친다. 또, $\cup_\sigma I_\sigma \subseteq \operatorname{int} \mathcal{I}$ 및 $\cup_\sigma J_\sigma \subseteq \operatorname{int}(S^1 \setminus \mathcal{I})$가 성립한다.

이제, I_σ, J_σ들을 살짝 늘려 여전히 서로 겹치지 않게 할 수 있다. 다시 말해, $I_\sigma \subseteq \operatorname{int} I'_\sigma,\ J_\sigma \subseteq \operatorname{int} J'_\sigma$를 만족하는 서로 겹치지 않는 닫힌 구간 $\{I'_\sigma, J'_\sigma : \sigma \in \{1,2\}^N\}$을 잡을 수 있다. 또, $\cup_\sigma I'_\sigma \subseteq \operatorname{int}(S \setminus \mathcal{I})$ 및 $\cup_\sigma J'_\sigma \subseteq \operatorname{int} \mathcal{I}$가 여전히 성립하게끔 하는 것도 어렵지 않다.

그러면 각각의 $\sigma \in \{1,2\}^N$에 대해 $\mathcal{S}(\operatorname{int} I_\sigma, \operatorname{int} J_\sigma)$는 $\operatorname{supp} \mu^{*N}$과 겹치는 *열린* 집합이고, 따라서 양수인 μ^{*N}-값을 가진다. 이는 곧 $S = \{\mathcal{S}(I'_\sigma, J_{\sigma'}) : \sigma \in \{1,2\}^N\}$라는 ($\mathcal{I}$를 중선으로 가지는) Schottky 집합 및 적당한 $\epsilon > 0$에 대해 μ^{*N}가 (S, ϵ)-맞춤 측도임을 의미한다. □

명제 3.9. *임의의 양수 $\epsilon > 0$, 자연수 m 및 2500보다 큰 자연수 N이 주어졌을 때 다음을 만족하는 $\kappa = \kappa(\epsilon, m, N) > 0$이 존재한다.*

구간 $\mathcal{I}$를 중선으로 가지는 분해능 N짜리 Schottky 집합 S 및 $\mathrm{Homeo}(S^1)$ 위의 확률 측도 μ에 대해, μ^{*m}이 (S, ϵ)-맞춤 측도임을 가정하자. 그러면 각 자연수 n에 대해 어떤 확률 공간 Ω_n, 가측 부분집합 $A_n \subseteq \Omega_n$, A_n의 가측 분할 $\mathcal{P}_n = \{\mathcal{E}_\alpha\}_\alpha$, 그리고 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 원소들을 값으로 가지는 확률변수들 $Z_n, \{w_i\}_{i=0,\ldots,\lfloor \kappa n \rfloor}, \{s_i\}_{i=1,\ldots,\lfloor \kappa n \rfloor}$가 존재하여 다음이 성립한다:

1. *$\mathbb{P}(A_n) \geq 1 - \frac{1}{\kappa} e^{-\kappa n}$.*
2. *$\mathcal{P}_n$을 이루는 각 동치류 $\mathcal{E} \in \mathcal{P}_n$에 한정해서 보았을 때, $w_0, \ldots, w_{\lfloor \kappa n \rfloor}$는 각각 고정된 위상동형사상들이고, s_i들은 각각 S 위에서 Schottky 맞춤 균일분포를 가지는 독립인 확률변수들이다.*
3. *A_n 안에서는 $i = 1, \ldots, \lfloor \kappa n \rfloor - 1$ 각각에 대해 $w_i \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$이다.*
4. *Z_n는 μ^{*n}의 분포를 따르며, A_n 위에서 $Z_n = w_0 s_1 w_1 \cdots s_{\lfloor \kappa n \rfloor} w_{\lfloor \kappa n \rfloor}$이다.*

이 명제를 가정하면 무작위 행보에 의한 지수함수적으로 가까워짐은 쉽게 증명할 수 있다.

보조정리 3.10. *원의 위상동형사상 $w \in \mathrm{Homeo}(S^1)$, 구간 $\mathcal{I}$를 중선으로 가지는 분해능 N짜리 Schottky 집합 S 및 S 위의 Schottky-맞춤 균일 분포 μ를 생각하자. 그러면*

$$\mathbb{P}_{s \sim \mu}\left(\mathrm{Len}(ws\mathcal{I}) \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \mathrm{Len}(w\mathcal{I})\right) \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{N}}$$

이 성립한다.

Proof. 먼저, 서로 겹치지 않는 닫힌 구간 $I_1, \ldots, I_N, J_1, \ldots, J_N$을 찾아서 $S = \mathfrak{S}(I_1, J_1) \cup \ldots \cup \mathfrak{S}(I_N, J_N)$ 꼴로 적자. 이때, $\mathfrak{S}(I_i, J_i)$의 원소들은 $\mathcal{I}$를 J_i 안으로 집어넣는다. $(*)$ 여기서 $wJ_1, \ldots, wJ_N$ 들은 $w\mathcal{I}$라는 구간에 포함되며 서로 겹치지 않는다. 따라서 이들의 길이의 합은 $\mathcal{I}$의 길이보다 작거나 같고

$$Ind := \left\{ i : \mathrm{Len}(wJ_i) \geq \frac{1}{\sqrt{N}} \mathrm{Len}(w\mathcal{I}) \right\}$$

의 크기가 최대 $\sqrt{N}$임을 관찰할 수 있다. 또한 $(*)$에 따르면, $i \notin Ind$를 고정했을 때 $\mathfrak{S}(I_i, J_i)$의 임의의 원소 s에 대해 $\mathrm{Len}(ws\mathcal{I}) \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \mathrm{Len}(w\mathcal{I})$가 성립한다. 이를 종합하여

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{s\sim\mu}\left(\mathrm{Len}(ws\mathcal{I}) \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \mathrm{Len}(w\mathcal{I}) \right) &\geq \mathbb{P}_{s\sim\mu}\left(s \in \mathfrak{S}(I_i, J_i) : i \notin Ind \right) \\ &\geq \frac{1}{N}(N - \sqrt{N}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{N}} \end{aligned}$$

를 관찰할 수 있다. □

보조정리 3.11. *구간 $\mathcal{I}$를 중선으로 가지는 분해능 $N \geq 100$짜리 Schottky 집합 S 및 위상동형사상 $w_0, \ldots, w_n \in \mathrm{Homeo}(S^1)$을 고정하되, $i = 1, \ldots, n$에 대해 $w_i\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$를 가정하자. 그러면 서로 독립이면서 각각 S 위에서 Schottky-맞춤 균일 분포를 가지는 $s_1, \ldots, s_n$에 대해*

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Len}\left(w_0 s_1 w_1 \cdots s_n w_n \cdot \mathcal{I}\right) \leq \frac{1}{N^{n/4}} \mathrm{Len}\left(w_0\mathcal{I}\right) \right) \geq 1 - e^{-n/4}$$

이 성립한다.

Proof. 이번에도 $S = \mathfrak{S}(I_1, J_1) \cup \ldots \cup \mathfrak{S}(I_N, J_N)$ 꼴로 적고 증명을 시작하겠다. 여기서, 각 i에 대해 $\mathfrak{S}(I_i, J_i)$의 임의의 원소 s는 $\mathcal{I}$를 J_i 안으로 보내기에, $s\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$가 항상 성립함을 주목하자. 즉,

$$W_0\mathcal{I} \supseteq W_0 s_1 \mathcal{I} \supseteq W_1\mathcal{I} \supseteq W_1 s_1 \mathcal{I} \supseteq \ldots \supseteq W_n\mathcal{I} \quad \left(W_k = W_k(s_0, \ldots, s_k) := w_0 s_1 w_1 \ldots s_k w_k\right)$$

는 s_i들의 선택지에 무관하게 항상 성립한다.

이제, $0 \leq k \leq n-1$ 및 $\{s_i : 1 \leq i \leq k\}$의 선택지를 하나 고정한 상태에서

$$\mathbb{P}_{s_{k+1}\sim S \text{ 위의 Schottky-맞춤 균일 분포}}\left(\mathrm{Len}(W_k s_{k+1}\mathcal{I}) \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \mathrm{Len}(W_k\mathcal{I}) \right) \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{N}}$$

가 성립한다는 것은 보조정리 3.10에서 관찰했다. 다시 말해,

$$E_k := \left\{ (s_1, \ldots, s_k) : \mathrm{Len}(W_{k-1}s_k\mathcal{I}) \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \mathrm{Len}(W_{k-1}\mathcal{I}) \right\}$$

로 두었을 때 $s_1, \ldots, s_k$의 선택지에 무관하게 $\mathbb{P}(E_{k+1}|s_1, \ldots, s_k) \geq 1 - 1/\sqrt{N}$이다. 이로부터

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} 1_{E_k} \geq n/2 \right) \geq \mathbb{P}\left(B(n, 1 - 1/\sqrt{N}) \geq n/2 \right) \tag{3.5}$$

임을 알 수 있다. 여기서, $B(n, 1 - 1/\sqrt{N})$란 평균값이 $1 - 1/\sqrt{N}$이고 서로 독립인 Bernoulli 변수 n개를 합한 이항확률변수를 얘기한다. 이 확률값을 어림하기 위해 Markov 부등식을 이용하겠다. 즉

$$e^{-n/2} \cdot \mathbb{P}\left(B(n, 1 - 1/\sqrt{N}) \leq n/2 \right) \leq \mathbb{E}\left[e^{-B(n, 1-1/\sqrt{N})} \right] \leq \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + e^{-1} \right)^n$$

를 관찰하겠다는 것이다. 여기서 $\sqrt{N} \geq 10$이라는 가정으로부터 $1/\sqrt{N} + e^{-1} \leq e^{-3/4}$를 얻는다. 이는 곧 $\mathbb{P}\left(B(n, 1-1/\sqrt{N}) \leq n/2\right) \leq e^{-n/4}$를 의미하며, 부등식 3.5과 결합하면 증명이 끝난다. $\square$

이제 비슷한 것을 생각하자.

보조정리 3.12. *원 위의 두 점 $x, y \in S^1$, 위상동형사상 $w \in \mathrm{Homeo}(S^1)$, 구간 $\mathcal{I}$를 중선으로 가지는 분해능 N짜리 Schottky 집합 S 및 S 위의 Schottky-맞춤 균일 분포 μ를 생각하자. 그러면*

$$\mathbb{P}_{s\sim\mu}\left(\{x, y\} \cap s\mathcal{I} = \emptyset\right) \geq 1 - 2/N$$

이 성립한다.

Proof. 이번에도 $S = \mathfrak{S}(I_1, J_1) \cup \ldots \cup \mathfrak{S}(I_N, J_N)$ 꼴로 두겠다. 그러면 각 i에 대해, $\mathfrak{S}(I_i, J_i)$의 모든 원소는 $\mathcal{I} \subseteq S^1 \setminus I_i$를 J_i 안으로 보낸다. 여기서 $J_1, \ldots, J_N$은 서로 겹치지 않는 구간들이므로, $Ind := \{i : \{x, y\} \cap J_i \neq \emptyset\}$을 정의하면 Ind의 크기는 2 이하다. 이에

$$\mathbb{P}_{s\sim\mu}\left(\{x, y\} \cap I = \emptyset\right) \geq \mathbb{P}_{s\sim\mu}\left(s \in \mathfrak{S}(I_i, J_i) : i \notin Ind\right) \geq \frac{1}{N}(N-2)$$

를 얻는다. $\square$

보조정리 3.13. *원 위의 두 점 $x, y \in S^1$, 구간 $\mathcal{I}$를 중선으로 가지는 분해능 $N \geq 6$짜리 Schottky 집합 S 및 위상동형사상 $w_0, \ldots, w_n \in \mathrm{Homeo}(S^1)$을 고정하되, $i = 1, \ldots, n$에 대해 $w_i\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$임을 가정하자. 그러면 서로 독립이면서 각각 S 위에서 Schottky-맞춤 균일 분포를 가지는 $s_1, \ldots, s_n$에 대해*

$$\mathbb{P}\left(\{x, y\} \cap w_0 s_1 w_1 \cdots s_n w_n \mathcal{I} = \emptyset\right) \geq 1 - e^{-n}$$

이 성립한다.

Proof. 보조정리 3.11의 증명에서와 같이,

$$W_0 I \supseteq W_0 s_1 \mathcal{I} \supseteq W_1 \mathcal{I} \supseteq W_1 s_1 \mathcal{I} \supseteq \ldots \supseteq W_n \mathcal{I} \quad \left(W_k = W_k(s_0, \ldots, s_k) := w_0 s_1 w_1 \ldots s_k w_k\right)$$

는 s_i의 선택지에 무관하게 성립한다. 또, $0 \leq k \leq n-1$ 및 $\{s_i : 1 \leq i \leq k\}$의 선택지를 고정했을 때

$$\mathbb{P}_{s_{k+1}\sim S \text{ 위의 Schottky-맞춤 균일분포}}\left(s_{k+1}\mathcal{I} \cap \{W_k^{-1}x, W_k^{-1}y\} = \emptyset\right) \geq 1 - 2/N$$

가 성립한다는 것을 보조정리 3.12에서 관찰했다. 다시 말해,

$$E_k := \left\{(s_1, \ldots, s_k) : \{x, y\} \cap W_{k-1} s_k \mathcal{I} = \emptyset\right\}$$

로 두면 $s_1, \ldots, s_k$의 선택지에 무관하게 $\mathbb{P}(E_{k+1} | s_1, \ldots, s_k) \geq 1 - 2/N$이 성립한다. 이로부터

$$\mathbb{P}\left(\{x, y\} \cap W_n \mathcal{I} = \emptyset\right) \geq \mathbb{P}\left(E_1 \cup \ldots \cup E_n\right) \geq 1 - (2/N)^n \geq 1 - e^{-n}$$

임을 알 수 있다. $\square$

위 보조정리의 상황은 다음과 같이 해석할 수도 있다. 구간 $\mathcal{I}$를 중선으로 가지는 분해능 $N \geq 6$짜리 Schottky 집합 $S = \cup_i \mathfrak{S}(I_i, J_i)$이 주어졌을 때, $\check{S} := \cup_i \mathfrak{S}(J_i, I_i)$는 구간 $S^1 \setminus \mathcal{I}$를 중선으로 가지는 Schottky 집합이 된다. 이제 S 위의 Schottky-맞춤 균일 분포 μ를 생각하면, $\check{\mu}(\cdot) := \mu(\cdot^{-1})$로 정의된 확률 분포 $\check{\mu}$는 $\check{S}$ 위의 Schottky-맞춤 균일 분포가 된다. 마지막으로, 위상동형사상 $w_0, \ldots, w_n$을 고정하면, 각 $i = 0, \ldots, n-1$에 대해 $w_i\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$임은 곧 $w_i^{-1}(S^1 \setminus \mathcal{I}) \subseteq (S^1 \setminus \mathcal{I})$임을 함의한다. 이제 보조정리 3.13를 적용하면 임의의 $x, y \in S^1$에 대해

$$\mathbb{P}_{s_i^{-1}\text{ : 독립적으로 } \check{S} \text{ 위에 Schottky-맞춤 분포}}\left(\{x, y\} \cap w_n^{-1} s_n^{-1} w_{n-1}^{-1} \cdots s_1^{-1} w_0^{-1}(S^1 \setminus \mathcal{I}) = \emptyset\right) \geq 1 - e^{-n}$$

가 성립한다. 이를 뒤집어 말하면,

$$\mathbb{P}_{s_i \text{ :독립적으로 } S \text{ 위에 Schottky-맞춤 분포}} \left(w_0 s_1 w_1 \cdots s_n w_n \cdot \{x, y\} \subseteq \mathcal{I} \right) \geq 1 - e^{-n}$$

라는 것이다. 이를 따로 기록해 두겠다.

보조정리 3.14. *원 위의 두 점 $x, y \in S^1$, 구간 $\mathcal{I}$를 중선으로 가지는 분해능 $N \geq 6$짜리 Schottky 집합 S 및 위상동형사상 $w_0, \ldots, w_n \in \mathrm{Homeo}(S^1)$을 고정하되, 각 $i = 0, \ldots, n-1$마다 $w_i\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$임을 가정하자. 그러면 서로 독립이면서 각각 S 위에서 Schottky-맞춤 균일 분포를 가지는 $s_1, \ldots, s_n$에 대해*

$$\mathbb{P} \left(w_0 s_1 w_1 \cdots s_n w_n \cdot \{x, y\} \subseteq \mathcal{I} \right) \geq 1 - e^{-n}$$

이 성립한다.

이제, 다음을 증명할 수 있다.

정리 3.15. *임의의 양수 $\epsilon > 0$, 자연수 m 및 2500보다 큰 자연수 N이 주어졌을 때, 다음을 만족하는 $\kappa_1 = \kappa_1(\epsilon, m, N) > 0$이 존재한다. 구간 $\mathcal{I}$를 중선으로 가지는 분해능 N짜리 Schottky 집합 S 및 $\mathrm{Homeo}(S^1)$위의 확률 측도 μ에 대해 μ^{*m}이 (S, ϵ)-맞춤 측도임을 가정하자. 그러면 임의의 $x, y \in S^1$ 및 임의의 자연수 n에 대해*

$$\mathbb{P}_{Z_n \sim \mu^{*n}} \left(d(Z_n x, Z_n y) \leq e^{-\kappa_1 n} \right) \geq 1 - \frac{1}{\kappa_1} e^{-\kappa_1 n}$$

이 성립한다.

Proof. 먼저 명제 3.9에서 보장하는 $\kappa = \kappa(\epsilon, m, N)$을 기록해 두자. 이어서 자연수 n을 고정했을 때, 명제 3.9에서 기술하는 대로 확률 공간 Ω_n, 가측 부분집합 A_n, A_n의 가측 분할 $\mathcal{P}_n = \{\mathcal{E}_\alpha\}_\alpha$, 그리고 확률 변수들 Z_n, $w_0, \ldots, w_{\lfloor \kappa n \rfloor}, s_1, \ldots, s_{\lfloor \kappa n \rfloor}$을 잡을 수 있다.

이제 $\mathcal{P}_n$ 안의 임의의 동치류 $\mathcal{E} \in \mathcal{P}_n$을 고정하자. $\mathcal{E}$에 한정했을 때, $w_0, \ldots, w_{\lfloor \kappa n \rfloor}$는 상수인 위상동형사상들이고 $s_1, \ldots, s_{\lfloor \kappa n \rfloor}$은 S 위에서 Schottky-맞춤 균일분포를 가지는 독립변수들이다. 또한, $w_1, \ldots, w_{\lfloor \kappa n \rfloor}$ 각각은 $w_i\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$를 만족한다. 이 덕분에 보조정리 3.11 및 보조정리 3.14를 적용할 수 있다.

먼저 편의상 $w_0' := w_0 s_1 w_1 \cdots s_{\lfloor 0.5\kappa n \rfloor} w_{\lfloor 0.5\kappa n \rfloor}$라는 확률변수를 정의하자. 이 위상동형사상은 $s_1, \ldots, s_{\lfloor 0.5\kappa n \rfloor}$의 선택지에 의존한다. 보조정리 3.11에 의해,

$$\mathbb{P} \left(\mathrm{Len}(w_0'\mathcal{I} = w_0 s_1 w_1 \cdots s_{\lfloor 0.5\kappa n \rfloor} w_{\lfloor 0.5\kappa n \rfloor} \cdot \mathcal{I}) \leq \frac{1}{N^{\lfloor \kappa n \rfloor / 8}} \cdot 1 \,\middle|\, \mathcal{E} \right) \geq 1 - e^{-n/4}$$

가 성립한다. 위에서 기술하는 사건은 $s_{\lfloor 0.5\kappa n \rfloor + 1}, \ldots, s_{\lfloor \kappa n \rfloor}$를 이용하지 않음에 주목하라. 또한 보조정리 3.14에 의해 w_0'의 선택지와 무관하게

$$\mathbb{P} \left(w_0' s_{\lfloor 0.5\kappa n \rfloor + 1} w_{\lfloor 0.5\kappa n \rfloor + 1} \cdots s_{\lfloor \kappa n \rfloor} w_{\lfloor \kappa n \rfloor} \cdot \{x, y\} \subseteq w_0'\mathcal{I} \,\middle|\, \mathcal{E}, w_0' \right) \geq 1 - e^{-n}$$

이 성립한다. 이를 결합하면,

$$\mathbb{P} \left(d(Z_n x, Z_n y) \leq \mathrm{Len}(w_0' \cdot \mathcal{I}) \leq \frac{1}{N^{\lfloor \kappa n \rfloor / 8}} \,\middle|\, \mathcal{E} \right) \geq (1 - e^{-n/4})(1 - e^{-n}) \geq 1 - 2 \cdot e^{-n/4}$$

을 얻는다. 이 하한을 임의의 $\mathcal{E} \in \mathcal{P}_n$ 위에서 얻을 수 있으므로, 이를 종합하여

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(d(Z_n x, Z_n y) \le N^{-\lfloor \kappa n \rfloor/8}\right) &\ge \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{P}_n} \mathbb{P}(\mathcal{E})\, \mathbb{P}\left(d(Z_n x, Z_n y) \le N^{-\lfloor \kappa n \rfloor/8} \,\middle|\, \mathcal{E}\right) \\ &\ge \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{P}_n} \mathbb{P}(\mathcal{E}) \cdot (1 - 2e^{-n/4}) \\ &= (1 - 2e^{-n/4})\, \mathbb{P}(A_n) \ge (1 - 2e^{-n/4})\big(1 - \frac{1}{\kappa} e^{-\kappa n}\big)\end{aligned}$$

를 얻는다. □

Free group 향해.

보조정리 3.16. *4보다 큰 정수 N을 고정하고 닫힌 구간 $2N$개 $I_1, \ldots, I_N, J_1, \ldots, J_N$를 생각하되, $I_1, \ldots, I_N$들끼리는 서로 겹치지 않으며 $J_1, \ldots, J_N$들끼리도 서로 겹치지 않는다고 가정하자. 그러면 임의의 위상동형사상 $g \in \mathrm{Homeo}(S^1)$에 대해,*

$$\#\big\{(i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2 : I_i\text{와 } gJ_j\text{가 겹침}\big\} \le 3N\sqrt{N}$$

가 성립한다.

Proof. 먼저

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(g) := \big\{I_i : \#\{j : I_i \cap gJ_j \ne \emptyset\} \ge \sqrt{N}\big\}$$

을 정의하겠다. 특히, $\mathcal{C}$의 각 원소는 $\{gJ_1, \ldots, gJ_N\}$ 중 두 개 이상의 구간과 만나며, 특정 J_j 안에 완전히 포함되어 있을 수 없다. 이로부터 각각의 gJ_j가 겹칠 수 있는 $\mathcal{C}$의 원소는 최대 두 개임을 관찰할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned}2N = 2\#\{gJ_j : j = 1, \ldots, N\} &\ge 2\#\{gJ_j : gJ_j\text{가 } \mathcal{C}\text{의 어떤 원소와 겹침}\} \\ &\ge \#\big\{(I_i, gJ_i) : I_i \cap gJ_j \ne \emptyset, I_i \in \mathcal{C}\big\} \\ &\ge \#\mathcal{C} \cdot \min_{I_i \in \mathcal{C}} \#\{J_j : I_i \cap gJ_j \ne \emptyset\} \\ &\ge \#\mathcal{C}\sqrt{N}\end{aligned}$$

를 얻으며, $\mathcal{C}$의 크기는 $2\sqrt{N}$보다 작다.

이제 $I_i \notin \mathcal{C}$를 고정했을 때, I_i와 겹치는 gJ_j의 개수는 $\sqrt{N}$ 이하다. 이를 모두 종합하면,

$$\begin{aligned}\#\big\{(i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2 : I_i\text{와 } gJ_j\text{가 겹침}\big\} &\le \#\mathcal{C} \cdot N + (N - \#\mathcal{C}) \cdot \sqrt{N} \\ &\le 2N\sqrt{N} + N\sqrt{N} = 3N\sqrt{N}\end{aligned}$$

을 얻기에 증명이 끝난다. □

보조정리 3.17. *구간 $\mathcal{I}$ 및 $\mathcal{I}'$를 각각 중선으로 가지는 분해능 $N \ge 4$짜리 Schottky 집합들 S 및 S'를 생각하자. 또, 서로 독립이면서 각각 S 및 S' 위에서 Schottky-맞춤 균일 분포를 가지는 확률변수 s 및 s'를 생각하자. 그러면 임의의 위상동형사상 $g \in \mathrm{Homeo}(S^1)$에 대해,*

$$\mathbb{P}\left(s' g s \bar{\mathcal{I}} \subseteq \mathrm{int}\, \mathcal{I}'\right) \ge 1 - 3/\sqrt{N}$$

가 성립한다.

Proof. 여느 때와 같이 $S = \mathfrak{S}(I_1, J_1) \cup \ldots \cup \mathfrak{S}(I_N, J_N)$ 및 $S' = \mathfrak{S}(I'_1, J'_1) \cup \ldots \cup \mathfrak{S}(I'_N, J'_N)$로 두자. 그러면 각 i에 대해 $\mathfrak{S}(I'_i, J'_i)$의 임의의 원소 s'의 역원 s'^{-1}는 $\overline{S^1 \setminus \mathcal{I}'}$를 I'_i 안으로 보내고, $\mathfrak{S}(I_i, J_i) \in S$의 임의의 원소 s는 $\overline{\mathcal{I}}$를 J_i 안으로 보낸다. 이제,

$$Ind := \{(i, j) : I'_i\text{와 } gJ_j\text{가 겹침}\}$$

를 잡으면 보조정리 3.16에 의해 그 크기는 $3N\sqrt{N}$ 이하이다. 또한, $(i, j) \notin Ind$인 경우 임의의 $s \in \mathfrak{S}(I_i, J_i)$ 및 $s' \in \mathfrak{S}(I'_j, J'_j)$를 잡으면,

$$gs\overline{\mathcal{I}} \subseteq gJ_j \subseteq S^1 \setminus I'_i \subseteq s'^{-1} \operatorname{int} \mathcal{I}'$$

가 성립한다. 이를 종합하면

$$\mathbb{P}\left(s'gs\bar{I} \subseteq \operatorname{int} I'\right) \geq \mathbb{P}\left(s \in \mathfrak{S}(I_i, J_i), s' \in \mathfrak{S}(I'_j, J'_j) : (i, j) \notin Ind\right) \geq 1 - 3/\sqrt{N}$$

를 얻는다. □

보조정리 3.18. *구간 $\mathcal{I}$ 및 $\mathcal{I}'$를 각각 중선으로 가지는 분해능 $N \geq 100$짜리 Schottky 집합들 S 및 S'를 생각하자. 또, $i = 1, \ldots, n$마다 S 위에서 Schottky-맞춤 균일 분포를 가지는 확률변수 s_i 및 S' 위에서 Schottky-맞춤 균일 분포를 가지는 확률변수 s_{-i}를 생각하되, $\{s_i : 1 \leq |i| \leq n\}$는 모두 독립이라고 가정하자. 더하여 위상동형사상 $\{w_i : -n \leq i \leq n\}$을 고정하되, $1 \leq i \leq n$일 때 $w_i\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ 및 $w_{-i}\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}'$임을 가정하자. 그러면*

$$\mathbb{P}\left(w_{-n}s_{-n} \cdots w_{-1}s_{-1} \cdot w_0 \cdot s_1w_1 \cdots s_nw_n \cdot \bar{\mathcal{I}} \subseteq \operatorname{int} \mathcal{I}'\right) \geq 1 - e^{-n}$$

이 성립한다.

위에서 w_0에 대해서는 아무것도 가정하지 않았음에 유의하라.

Proof. 먼저 W_0는 항등사상으로 둔 뒤, $W_k := s_1w_1 \cdots s_kw_k$ 및 $W_{-k} := w_{-k}s_{-k} \cdots w_{-1}s_{-1}$를 정의하겠다. 그러면

$$W_0\mathcal{I} \supseteq W_0s_1\mathcal{I} \supseteq W_1\mathcal{I} \supseteq W_1s_2\mathcal{I} \supseteq \ldots \supseteq W_n\mathcal{I},$$
$$W_0^{-1}\mathcal{I}' \subseteq (s_{-1}W_0)^{-1}\mathcal{I}' \subseteq W_{-1}^{-1}\mathcal{I}' \subseteq (s_{-2}W_{-1})^{-1}\mathcal{I}' \subseteq W_{-2}^{-1}\mathcal{I}' \subseteq \ldots \subseteq W_{-n}^{-1}\mathcal{I}'$$

는 s_i의 선택지에 무관하게 성립한다. 또,

$$E_k := \{(s_{-k}, \ldots, s_{-1}, s_1, \ldots, s_k) : (s_{-k}W_{-(k-1)})^{-1} \operatorname{int} \mathcal{I}' \supseteq W_{k-1}s_k\bar{\mathcal{I}}\}$$

를 정의하면, 보조정리 3.17에 의해 $s_{-k}, \ldots, s_k$의 선택지에 무관하게

$$\mathbb{P}\left(E_{k+1} \,\middle|\, s_{-k}, \ldots, s_k\right) \geq 1 - 3/\sqrt{N} \geq 1 - 1/e$$

가 성립한다. 그러면

$$\mathbb{P}\left(W_n\bar{I} \subseteq W_{-n}^{-1} \operatorname{int} \mathcal{I}'\right) \geq \mathbb{P}\left(E_1 \cup \ldots \cup E_n\right) \geq 1 - (1/e)^n \geq 1 - e^{-n}$$

임을 알 수 있다. □

정리 3.19. *구간 $\mathcal{I}$ 및 $\mathcal{I}'$를 각각 중선으로 가지는 분해능 $N \geq 100$짜리 Schottky 집합 S 및 S'를 고정한 뒤, 각각 S 및 S' 위에서 Schottky-맞춤 균일하게 분포된 확률 측도 μ 및 μ'를 생각하자. 위상동형사상 $w_0, \ldots, w_{2n}$ 및 $v_0, \ldots, v_{2n}$을 고정하되,*

$$w_i\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I},\ v_i\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}' \quad (i = 1, \ldots, 2n - 1)$$

를 가정하겠다. 더하여, S 위에서 Schottky-맞춤 균일 분포를 가지는 확률변수들 $s_1, \ldots, s_{4n}$ 및 S' 위에서 Schottky-맞춤 균일 분포를 가지는 확률변수들 $t_1, \ldots, t_{4n}$가 모두 독립이라고 가정하자. 그러면

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{c} w_0 s_1 w_1 \cdots s_{2n} w_{2n}\text{과 } v_0 t_1 v_1 \cdots t_{4n} v_{4n}\text{는} \\ \textit{Schottky 순서쌍을 이루며 자유 부분군을 생성함} \end{array} \right) \geq 1 - 6e^{-n/10}$$

이 성립한다.

Proof. 다음 사건들을 정의하자.

$$\begin{aligned}
E_1 &:= \{s_{n+1} w_{n+1} \cdots s_{2n} w_{2n} \cdot w_0 s_1 w_1 \cdots s_n w_n \bar{\mathcal{I}} \subseteq \operatorname{int} \mathcal{I}\}, \\
E_2 &:= \{t_{n+1} v_{n+1} \cdots t_{2n} v_{2n} \cdot v_0 t_1 v_1 \cdots t_n v_n \bar{\mathcal{I}}' \subseteq \operatorname{int} \mathcal{I}'\}, \\
E_3 &:= \{s_{n+1} w_{n+1} \cdots s_{2n} w_{2n} \cdot v_0 t_1 v_1 \cdots t_n v_n \bar{\mathcal{I}}' \subseteq \operatorname{int} \mathcal{I}\}, \\
E_4 &:= \{t_{n+1} v_{n+1} \cdots t_{2n} v_{2n} \cdot w_0 s_1 w_1 \cdots s_n w_n \bar{\mathcal{I}} \subseteq \operatorname{int} \mathcal{I}'\}, \\
E_5 &:= \{s_{n+1} w_{n+1} \cdots s_{2n} w_{2n} \cdot v_{2n}^{-1} t_{2n}^{-1} \cdots v_{n+1}^{-1} t_{n+1}^{-1} \cdot \overline{S^1 \setminus \mathcal{I}'} \subseteq \operatorname{int} \mathcal{I}\}, \\
E_6 &:= \{v_n^{-1} t_n^{-1} \cdots v_1^{-1} t_1^{-1} v_0^{-1} \cdot w_0 s_1 w_1 \cdots s_n w_n \cdot \bar{\mathcal{I}} \subseteq \operatorname{int}(S^1 \setminus \mathcal{I}')\}.
\end{aligned}$$

첫번째 사건을 먼저 들여다보겠다. 이 경우 s_i들은 모두 S 위에서 Schottky-맞춤 균일 분포를 가지는 독립 확률변수들이고, S는 $\mathcal{I}$를 중선으로 가지며 각각의 $i \neq 0, 2n$에 대해 $w_i \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$가 성립함을 관찰할 수 있다. (여기서 $w_{2n} \cdot w_0$는 $\mathcal{I}$를 중첩시키는 역할을 하지 않음에 주의하라.) 그러면 보조정리 3.18에 의해 $\mathbb{P}(E_1) \geq 1 - e^{-n}$이 성립한다. 비슷한 이유로, E_2, E_3 및 E_4의 확률 또한 각각 $1 - e^{-n}$ 이상이다.

다섯 번째 사건을 들여다보기 전에, $S' := \mathfrak{S}(I_1', J_1') \cup \ldots \cup \mathfrak{S}(I_N', J_N')$를 거꾸로 뒤집은 Schottky 집합 $\check{S}' := \mathfrak{S}(J_1', I_1') \cup \ldots \cup \mathfrak{S}(J_N', I_N')$을 기록해 두겠다. 그러면 s_i들은 모두 S 위에서 Schottky-맞춤 균일 분포를 가지는 독립 확률변수들인 반면, t_i^{-1}들은 $\check{S}'$ 위에서 Schottky-맞춤 균일 분포를 가지는 독립 확률변수들이다. 또한 S는 $\mathcal{I}$를 중선으로 가지며 각 i마다 $w_i \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$가 성립하는 반면, $\check{S}'$는 $S^1 \setminus \mathcal{I}'$를 중선으로 가지며 각 i마다 $v_i^{-1}(S^1 \setminus \mathcal{I}') \subseteq (S^1 \setminus \mathcal{I}')$가 성립한다. 이제 보조정리 3.18을 적용하면 $\mathbb{P}(E_5) \geq 1 - e^{-n}$가 성립한다. 비슷한 이유로 E_6의 확률 또한 $1 - e^{-n}$ 이상이다.

이제 사건 $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6$ 위에서 구간들

$$\begin{aligned}
I^{(1)} &:= (s_{n+1} w_{n+1} \cdots s_{2n} w_{2n})^{-1} (S^1 \setminus \operatorname{int} \mathcal{I}), \\
I^{(2)} &:= (t_{n+1} v_{n+1} \cdots t_{2n} v_{2n})^{-1} \cdot (S^1 \setminus \operatorname{int} \mathcal{I}'), \\
J^{(1)} &:= w_0 s_1 w_1 \cdots s_n w_n \overline{\mathcal{I}}, \\
J^{(2)} &:= v_0 t_1 v_1 \cdots t_n v_n \overline{\mathcal{I}}'
\end{aligned}$$

의 위치 관계를 파악하겠다. 먼저 사건 E_1의 정의에 따라 $I^{(1)}$과 $J^{(1)}$은 서로 겹치지 않는다. 또 사건 E_2의 정의에 따라 $I^{(2)}$과 $J^{(2)}$은 서로 겹치지 않는다. 한편 E_3의 정의에 따라 $I^{(1)}$과 $J^{(2)}$도 겹치지 않고, E_4의 정의에 따라 $I^{(2)}$와 $J^{(1)}$도 겹치지 않는다. 이제 E_5의 정의를 들여다보면 $I^{(1)}$과 $I^{(2)}$가 겹치지 않음을 알 수 있고, E_6의 정의에 따라 $J^{(1)}$과 $J^{(2)}$도 겹치지 않는다. 즉 사건 $\cup_{k=1}^6 E_k$ 안에서 위 네 구간은 겹치지 않는다. 또 $w_0 s_1 w_1 \cdots s_{2n} w_{2n}$은 $S^1 \setminus I^{(1)}$을 정확히 $\operatorname{int} J^{(1)}$로 보내고, $v_0 t_1 v_1 \cdots t_{2n} v_{2n}$은 $S^1 \setminus I^{(2)}$을 정확히 $\operatorname{int} J^{(2)}$로 보낸다.

이를 모두 종합하면, 사건 $\cup_{k=1}^6 E_k$ 위에서 $w_0 s_1 w_1 \cdots s_{2n} w_{2n}$과 $v_0 t_1 v_1 \cdots t_{2n} v_{2n}$는 $I^{(1)}, I^{(2)}, J^{(1)}, J^{(2)}$에 결부된 Schottky 순서쌍을 이루며 따라서 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 (차수 2짜리) 자유 부분군을 생성한다. 각 k에 대해 $\mathbb{P}(E_k^c) \leq e^{-n}$이므로, $\cup_{k=1}^6 E_k$의 확률은 최소 $1 - 6e^{-n}$이다. 이로써 증명이 끝난다. □

이제 정리 3.15의 증명에서와 같이, 명제 3.9에서 보장하는 확률 공간 및 가측 분할을 이용하면 정리 3.19로부터 다음을 이끌어낼 수 있다.

정리 3.20. *임의의 양수 $\epsilon > 0$, 자연수 m 및 100보다 큰 자연수 N이 주어졌을 때, 다음을 만족하는 $\kappa_2 = \kappa_2(\epsilon, m, N) > 0$이 존재한다.*

중선 달린 분해능 N짜리 Schottky 집합 S 및 S'를 생각한 뒤, $\mathrm{Homeo}(S^1)$ 위의 확률 측도 μ 및 μ'에 대해, μ^{*m}이 (S, ϵ)-맞춤 측도이고 μ'^{*m}이 (S', ϵ)-맞춤 측도임을 가정하자. 그러면 임의의 자연수 n에 대해

$$\mathbb{P}_{(Z_n, Z'_n) \sim \mu^{*n} \times \mu'^{*n}} \left(Z_n, Z'_n \text{는 Schottky 순서쌍을 이루며 자유 부분군을 생성함} \right) \geq 1 - \frac{1}{\kappa_2} e^{-\kappa_2 n}$$

이 성립한다.

4. 중추 전환 기법(PIVOTING TECHNIQUE)

먼저 다음을 관찰하자.

보조정리 4.1. *임의의 양수 $\epsilon > 0$ 및 자연수 m이 주어졌을 때 다음을 만족하는 $\kappa = \kappa(\epsilon, m, N)$이 존재한다.*

어떤 Schottky 집합 S 및 $\mathrm{Homeo}(S^1)$ 위의 확률 측도 μ에 대해, μ^{*m}이 (S, ϵ)-맞춤 측도임을 가정하자. 그러면 각 자연수 n에 대해 어떤 확률 공간 Ω_n, 가측 부분집합 $A_n \subseteq \Omega_n$, A_n의 가측 분할 $\mathcal{P}_n = \{\mathcal{E}_\alpha\}_\alpha$, 그리고 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 원소들을 값으로 가지는 확률변수들 $Z_n, \{w_i\}_{i=0,\ldots,\lfloor \kappa n \rfloor}, \{r_i, s_i, t_i\}_{i=1,\ldots,\lfloor \kappa n \rfloor}$이 존재하여 다음을 만족한다.

(1) $\mathbb{P}(A_n) \geq 1 - \frac{1}{\kappa} e^{-\kappa n}$.
(2) $\mathcal{P}_n$을 이루는 각 동치류 $\mathcal{E} \in \mathcal{P}_n$에 한정해서 보았을 때, $w_0, \ldots, w_{\lfloor \kappa n \rfloor}$는 각각 고정된 위상동형 사상들이고, r_i, s_i, t_i들은 각각 S 위에서 Schottky 맞춤 균일분포를 가지는 독립인 확률변수들이다.
(3) Z_n는 μ^{*n}의 분포를 따르며, A_n 위에서 $Z_n = w_0 r_1 s_1 t_1 w_1 \cdots r_{\lfloor \kappa n \rfloor} s_{\lfloor \kappa n \rfloor} t_{\lfloor \kappa n \rfloor} w_{\lfloor \kappa n \rfloor}$이다.

Proof. 이 명제를 $3m$의 정수 배수인 n들에 대해서만 증명해도 충분하다. 실제로 $n = 3mk + l$ $(1 \leq l \leq 3m - 1)$ 꼴인 정수에 대해서는 다음과 같이 다루면 된다. 먼저 $n = 3mk$에 대해 Ω_{3mk}, $\mathcal{P}_{mk}$, $(w_i)_i, (r_i, s_i, t_i)_i$를 잡은 뒤, $G = \mathrm{Homeo}(S^1)$에 대해 (G^l, μ^l)라는 확률공간을 생각한다. 그러면

$$\Omega_{3mk+l} := \Omega_{mk} \times G^l,$$
$$\mathcal{P}_{3mk+l} := \mathcal{P}_{mk} \times G^l = \{\mathcal{E}_\alpha \times (g_1, \ldots, g_l) : \mathcal{E}_\alpha \in \mathcal{P}_{3mk}, (g_1, \ldots, g_l) \in G^l\}$$

를 정의할 수 있다. 그후 $(w_i)_i, (r_i, s_i, t_i)_i$는 모두 그대로 두되 $w_{\lfloor \kappa n \rfloor}$만 $w_{\lfloor \kappa n \rfloor} \cdot g_1 \cdots g_l$로 새로 정의하면, 요구하는 성질을 모두 만족할 수 있다.

가정에 의해 μ^{*m}이 (S, ϵ)-맞춤 측도이므로, S 위에 Schottky-맞춤 균일한 분포를 가지는 적당한 확률 측도 μ_S 및 또다른 $\mathrm{Homeo}(S^1)$상의 확률 측도 ν을 잡아

$$\mu^{*3m} = \epsilon^3 \mu_S^{*3} + (1 - \epsilon^3)\nu$$

꼴로 나타낼 수 있다. 이제 평균 ϵ짜리 Bernoulli 확률변수 $(\rho_i)_{i=0}^\infty$, μ_S를 분포로 가지는 확률변수 $(\eta_i^{(1)})_{i=1}^\infty$, $(\eta_i^{(2)})_{i=1}^\infty$ 및 $(\eta_i^{(3)})_{i=1}^\infty$, ν를 분포로 가지는 확률변수 $(\nu_i)_{i=1}^\infty$를 모두 독립적으로 잡은 뒤

$$\rho_i = 1\text{일 때 } g_i := \eta_i^{(1)} \cdot \eta_i^{(2)} \cdot \eta_i^{(3)}, \ \ \rho_i = 0\text{일 때 } g_i = \nu_i$$

라는 규칙으로 g_i를 정의하면, $g_1, g_2, \ldots$는 모두 μ^{*3m}를 분포로 가지는 독립변수가 된다. 이제

$$\{i(1) < i(2) < \ldots\} := \{1 \le i \le n/3m : \rho_i = 1\},\ N := \#\{1 \le i \le n/3m : \rho_i = 1\}$$

로 두면 Markov 부등식에 의해

$$e^{-\epsilon n/10m} \cdot \mathbb{P}\left(N \le \epsilon n/10m\right) \le \mathbb{E}\left[e^{-B(n/3m,\epsilon)}\right] \le \left(1 - \epsilon(1-e^{-1})\right)^{n/3m} \le (1-0.6\epsilon)^{n/3m} \le e^{-0.6\cdot\epsilon n/3m}$$

가 성립하고, 따라서 N이 $\epsilon n/10m$보다 작을 확률은 $e^{-\epsilon n/10m}$ 이하다. 이제 $\{N \ge \epsilon n/10m\}$ 위에서

$$\begin{aligned} w_0 &:= \prod_{i=1}^{i(1)-1} g_i = \nu_1 \cdots \nu_{i(1)-1}, \\ w_l &:= \prod_{i=i(l)+1}^{i(l+1)-1} g_i = \nu_{i(l)+1} \cdots \nu_{i(l+1)-1} \qquad (l = 1, \ldots, \lfloor \epsilon n/10m \rfloor - 1) \\ w_{\lfloor \epsilon n/10m \rfloor} &:= \prod_{i=i(\lfloor \epsilon n/10m \rfloor)+1}^{n/3m} g_i = \nu_{i(\lfloor \epsilon n/10m \rfloor)+1} \cdots \nu_{n/3m} \end{aligned}$$

로 두고 각 $l = 1, \ldots, \lfloor \epsilon n/10m \rfloor$에 대해 $(r_l, s_l, t_l) := \left(\eta^{(1)}_{i(l)}, \eta^{(2)}_{i(l)}, \eta^{(3)}_{i(l)}\right)$로 두자. 그러면

$$Z_n := g_1 g_2 \cdots g_{n/3} = w_0 r_1 s_1 t_1 w_1 \cdots r_{\lfloor \epsilon n/10m \rfloor} s_{\lfloor \epsilon n/10m \rfloor} t_{\lfloor \epsilon n/10m \rfloor} w_{\lfloor \epsilon n/10m \rfloor}$$

는 μ^{*n}을 분포로 가진다. 이제 $\{\rho_l, \eta_l : l\}$ 및 $\left\{\eta^{(1)}_l, \eta^{(2)}_l, \eta^{(3)}_l : l > i(\lfloor \epsilon n/10m \rfloor)\right\}$의 값을 기준으로 동치류를 만들면 주어진 조건을 만족하게 되어 증명이 끝난다. $\square$

앞에서 본것 다시.

정의 4.2. *자연수 N을 생각한 뒤 분해능 N짜리 Schottky 집합 $S = \cup_{i=1}^N \mathfrak{S}(I_i, J_i)$을 생각하자. 임의의 위상동형사상 $g \in \mathrm{Homeo}(S^1)$에 대해,*

$$\mathcal{C}(g; S) := \left\{I_i : \#\{j : \bar{I}_i \cap g\bar{J}_j \ne \emptyset\} \ge \sqrt{N}\right\}$$

로 두겠다. 또, 임의의 구간 I에 대해

$$\mathcal{R}(I; S) := \{J_i : \bar{J}_i \cap \bar{I} \ne \emptyset\}$$

로 두겠다.

보조정리 4.3. *분해능 N짜리 Schottky 집합 S 및 임의의 위상동형사상 $g \in \mathrm{Homeo}(S^1)$에 대해, $\mathcal{C}(g; S)$의 크기는 $2\sqrt{N}$ 이하이다. 또한, 임의의 $I \in \mathcal{C}(g; S)$에 대해 $\mathcal{R}(g^{-1}I; S)$의 크기는 $\sqrt{N}$보다 이하이다.*

앞선 정의를 하나 돌이켜 보자. Schottky 집합 $S = \cup_{i=1}^N \mathfrak{S}(I_i, J_i)$가 하나 고정되어 있을 때, S의 각 원소는 어떤 $\mathfrak{S}(I_i, J_i)$에 포함되어 있고 이때 I_i를 $I(s)$로, J_i를 $J(s)$로 나타내기로 했음을 기억하라.

정의 4.4. *구간 $\mathcal{I}$를 중선으로 가지는 Schottky 집합*

$$S := \cup_{i=1}^N \mathfrak{S}(I_i, J_i)$$

을 고정하자. 원의 위상동형사상의 나열 $\mathbf{w} = (w_i)_{i=0}^{\infty}$를 고정한 뒤, S의 원소의 나열 $\mathbf{r} = (r_i)_{i=1}^{\infty}, \mathbf{s} = (s_i)_{i=1}^{\infty}, \mathbf{t} = (t_i)_{i=1}^{\infty}$를 뽑겠다. 편의를 위해 다음과 같은 재귀적인 표기법을 사용하겠다:

$$W_0 := w_0,\ W_n := W_{n-1} \cdot r_n s_n t_n \cdot w_n\ (n > 0).$$

음이 아닌 정수 n에 대해 중추적 구간 (pivotal intervals) $L_n = L_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w}) \subseteq S^1$ *및 중추 시점 집합* (set of pivotal times) $P_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w}) \subseteq \{1, \ldots, n\}$*을 다음과 같이 재귀적으로 정의하겠다:*

(1) $n = 0$일 때는 $L_0 := \mathcal{I}, P_0 := \emptyset$으로 둔다.
(2) $n \geq 1$일 때는 다음 두 가지 케이스로 나누어 생각한다.
  (A) 만약 $J(r_n) \subseteq W_{n-1}^{-1} L_{n-1}$ 및 $I(t_n) \notin \mathcal{C}(w_n; S)$가 성립한다면, $L_n := W_{n-1} r_n s_n \mathcal{I}$ 및 $P_n := P_{n-1} \cup \{n\}$로 정의한다.
  (B) 만약 $J(r_n) \subseteq W_{n-1}^{-1} L_{n-1}$ 또는 $I(t_n) \notin \mathcal{C}(w_n; S)$가 성립하지 않으면,

$$\mathcal{Q} := \Big\{ i \in P_{n-1} : I(t_i) \notin \mathcal{C}\big(w_i \cdot W_i^{-1} \cdot W_n; S\big) \Big\}$$

  라는 집합을 생각하겠다.
    (i) $\mathcal{Q}$가 공집합이 아닌 경우 $k := \max \mathcal{Q}$에 대해 $L_n := W_{k-1} r_k s_k \mathcal{I}$ 및 $P_n := P_{n-1} \cap \{1, \ldots, k\}$로 정의한다.
    (ii) $\mathcal{Q}$가 공집합이라면 $L_n := W_n \mathcal{I}$, $P_n := \emptyset$으로 둔다.

다음 관찰은 정의로부터 곧바로 따라 나온다.

보조정리 4.5. *정의 4.4의 세팅에서, 각각의 음의 아닌 정수 n에 대해 $P_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w})$ 및 $L_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w})$는 $(r_i, s_i, t_i)_{i=1}^{n}, (w_i)_{i=0}^{n}$의 값에만 의존하며, $(r_i, s_i, t_i, w_i)_{i=n+1}^{\infty}$의 값에 의존하지 않는다.*

다음으로, 중추 시점에 등장하는 $\mathcal{I}$의 복사본들이 중첩되어 있음을 확인하고자 한다. 이는 다음 보조정리로부터 따라 나온다.

보조정리 4.6. *정의 4.4의 세팅에서 음이 아닌 정수 u를 정한 뒤 연달아 있는 P_u의 원소들 $l < m$을 생각하자. 즉 $l, m \in P_u$이고 $l = \max(P_u \cap \{1, \ldots, m-1\})$임을 가정하는 것이다. 그러면 $W_{l-1} r_l s_l \mathcal{I} \supseteq W_{l-1} r_l s_l t_l (S \setminus I(t_l)) \supseteq W_{m-1} r_m \mathcal{I}$가 성립한다.*

Proof. 먼저, Schottky 집합 S 및 그 중선 $\mathcal{I}$의 성질에 의해, 그 어떤 $t \in S$에 대해서도 $S^1 \setminus I(t) \subseteq t^{-1}\mathcal{I}$가 성립한다. 이로부터 첫번째 포함관계는 따라 나온다. 따라서 두번째 포함관계만 증명하면 된다. 이를 위해 다음을 관찰하자:

주장 4.7. *숫자 l은 P_{l-1}로부터 P_l이 건설되는 시점에 새로 추가되었어야 한다. 다시 말해, $P_{l-1} = P_l \cup \{l\}$이 성립한다.*

위를 관찰하기 위해 결론을 부정해 보자. 즉 P_l는 $P_{l-1} \subseteq \{1, \ldots, l-1\}$의 부분집합임을 가정하는 것이다. 그러면 P_l은 물론이고, $P_{l+1}, P_{l+2}, \ldots$는 모두 l을 포함할 수 없다. 이후 P_l로부터 P_{l+1}이, 또 P_{l+1}로부터 P_{l+2}가 건설되는 과정에서는 l이 추가될 수 없기 때문이다. 하지만 우리는 P_u이 l을 포함한다는 것을 알기에 이는 모순이고, 주장이 따라 나온다.

마찬가지 이유로, $P_{m-1} = P_m \cup \{m\}$ 또한 성립한다. 따라서, $n = l$단계 및 $n = m$단계에서는 정의 4.4에서 기술하는 경우들 중 (2-A)가 성립했다는 것을 알 수 있다.

이제 두번째 주장은 다음과 같다.

주장 4.8. *$P_u \cap \{1, \ldots, m-1\} = P_{m-1}$이 성립한다.*

먼저, P_u이 가지고 있는 $m-1$ 이하인 원소들은 모두 $m-1$단계 혹은 그 전에 얻고 이후 잃어버리지 않았던 숫자들이다. 따라서 이들은 모두 P_{m-1}에도 속한다. 한편, P_{m-1}이 가지고 있는 원소는 이후에도 결코 사라지지 않는데, 그 이유는 다음과 같다. 만약 $P_{m-1} \subseteq \{1, \ldots, m-1\}$의 어떤 원소를 어떤 n단계($n = m, \ldots, u$)에서 잃는다면, 그 n단계에서는 정의 4.4의 (2-B) 시나리오가 벌어지고, 특히 $k = \max \mathcal{Q}$가 $m-1$보다 작아야만 한다. 그렇다면 P_n은 P_{m-1}의 원소뿐만 아니라 m 또한 잃게 되는데, P_u이 m을 보유하고 있음을 알기에 이는 모순이다. 이로써 주장을 얻는다.

이제 두 가지 경우로 나누어 본 증명을 완료하겠다.

(1) $l = m-1$: 이 경우, l단계에서도 (2-A) 시나리오가 벌어졌고 $m = l+1$ 단계에서도 (2-A)가 벌어졌다. 따라서 $J(r_{l+1}) \subseteq W_l^{-1} L_l := (t_l w_l)^{-1}\mathcal{I}$가 성립한다. 이는 곧

$$r_{l+1}\mathcal{I} \subseteq J(r_{l+1}) \subseteq (t_l w_l)^{-1}\mathcal{I}, \ W_l r_{l+1}\mathcal{I} \subseteq W_l (t_l w_l)^{-1}\mathcal{I} = W_{l-1} r_l s_l \mathcal{I}$$

임을 암시하기에 목표한 명제가 성립한다.

(2) $l < m-1$: 이 경우, $P_{m-1} = P_u \cap \{1, \ldots, m-1\} \subseteq \{1, \ldots, l\}$이 $m-1$을 포함하지 않기에, $n = m-1$단계에서는 (2-B) 시나리오가 성립했어야 한다. 다만 $P_{m-1} = P_u \cap \{1, \ldots, m-1\}$이 l이라는 원소를 포함하기에 (2-B-ii) 시나리오에 해당할 수는 없다. 즉 (2-B-i) 시나리오가 성립했어야 하고, l은 $(m-1)$단계에서의 $\mathcal{Q}$의 최대 원소이며 $L_{m-1} := W_{l-1} r_l s_l \mathcal{I}$가 성립한다. 이제 $n = m$단계에서는 (2-A) 시나리오가 벌어졌기에, $J(r_m) \subseteq W_m^{-1} L_{m-1}$임을 안다. 다시 말해,

$$W_m r_m \mathcal{I} \subseteq W_m J(r_m) \subseteq L_{m-1} = W_{l-1} r_l s_l \mathcal{I}$$

가 성립해 증명이 끝난다.

□

$\mathcal{I}$는 Schottky 집합 S의 중선이기에 임의의 $s \in S$에 대해 $\mathcal{I} \supseteq s\mathcal{I}$임을 다시금 상기하자. 이 사실과 보조정리 4.6을 조합하면 다음 결과를 얻는다.

따름정리 4.9. *정의 4.4의 세팅에서 음이 아닌 정수 n을 정한 뒤 $P_n := \{i(1) < i(2) < \ldots < i(\#P_n)\}$과 같이 순차적으로 나타내면,*

$$\begin{aligned} W_{i(1)-1} r_{i(1)} \mathcal{I} \supseteq W_{i(1)-1} r_{i(1)} s_{i(1)} \mathcal{I} \supseteq W_{i(2)-1} r_{i(2)} \mathcal{I} \supseteq W_{i(2)-1} r_{i(2)} s_{i(2)} \mathcal{I} \supseteq \\ \ldots \supseteq W_{i(\#P_n)-1} r_{i(\#P_n)} \mathcal{I} \supseteq W_{i(\#P_n)-1} r_{i(\#P_n)} s_{i(\#P_n)} \mathcal{I} \end{aligned}$$

가 성립한다.

다음으로, 분해능이 높은 S를 가져온 뒤 $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$를 S 위에서 Schottky-균일하게 뽑는다면 정의 4.4에서 시나리오 (2-A)가 성립할 확률이 높다는 것을 관찰하겠다.

보조정리 4.10. *중선 달린 분해능 N짜리 Schottky 집합 S 및 양의 정수 n을 고정한 뒤,* $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 원소 나열 $\mathbf{w} = (w_i)_{i=0}^{\infty}$, S의 원소 나열 $\mathbf{s} = (s_i)_{i=1}^{\infty}$를 고정하자. 또, S의 원소 나열 두 개 $\mathbf{r} = (r_i)_{i=1}^{\infty}$, $\mathbf{t} = (t_i)_{i=1}^{\infty}$를 <u>$i = n$번째 항을 제외하고</u> 고정하자. 이때, S 위에 Schottky-균일하게 분포된 임의의 확률 측도 μ에 대해*

$$\mathbb{P}_{r_n, t_n \sim \text{독립적인 } \mu\text{-분포}} \big(\#P_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w}) = \#P_{n-1}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w}) + 1\big) \geq 1 - 4/\sqrt{N}$$

이 성립한다.

Proof. Schottky 집합 S에 결부된 구간들을 $\{I_i, J_i : i = 1, \ldots, N\}$로 적겠다. 주어진 고정 입력값으로부터 P_{n-1} 및 L_{n-1}는 확정된다. 이때 $(n-1)$ 단계에서 세 가지 가능성이 있다:

(1) 시나리오 (2-A)가 성립했을 경우: 그러면 $I(t_{n-1}) \in \mathcal{C}(w_{n-1}; S)$ 및 $L_{n-1} = W_{n-2} r_{n-1} s_{n-1} \mathcal{I}$가 성립한다.

(2) 시나리오 (2-B-i)가 성립했을 경우: 그러면 $k = \max P_{n-1}$에 대해 $I(t_k) \in \mathcal{C}(w_k W_k^{-1} W_{n-1}; S)$ 및 $L_{n-1} := W_{k-1} r_k s_k \mathcal{I}$가 성립한다.

(3) 시나리오 (2-B-ii)가 성립했을 경우: 그러면 $L_{n-1} := W_{n-1}\mathcal{I}$는 모든 $W_{n-1} J_i$들을 포함한다.

이제, 사건의 필요충분조건은 n단계에서 (2-A) 시나리오가 성립하는 것이다. 먼저 보조정리 4.3에 따르면

$$\mathbb{P}_{t_n \sim \mu}\left(I(t_n) \in \mathcal{C}(w_n; S)\right) \le \frac{1}{N} \cdot 2\sqrt{N} = \frac{2}{\sqrt{N}}$$

가 성립한다. 이제 위에서 얘기한 세 가능성 각각에 대해 $J(r_n) \subseteq W_{n-1}^{-1} L_{n-1}$의 확률을 계산해 보자.

(1) 시나리오 (2-A)가 성립했을 경우: $I(t_{n-1}) \in \mathcal{C}(w_{n-1}; S)$라는 사실에 보조정리 4.3을 적용하면 $\mathcal{R}\big(w_{n-1}^{-1} I(t_{n-1}); S\big)$의 크기가 $2\sqrt{N}$ 이하라는 것을 알 수 있다. 또한 $J(r_n) \notin \mathcal{R}\big(w_{n-1}^{-1} I(t_{n-1}); S\big)$인 경우,

$$J(r_n) \subseteq S^1 \setminus (\operatorname{int} w_{n-1}^{-1} I(t_{n-1})) \subseteq w_{n-1}^{-1} t_{n-1}^{-1} \mathcal{I} = W_{n-1}^{-1} W_{n-2} r_{n-1} s_{n-1} \mathcal{I} = W_{n-1}^{-1} L_{n-1}$$

가 성립한다. 따라서

$$\mathbb{P}_{r_n \sim \mu}\left(J(r_n) \subseteq W_{n-1}^{-1} L_{n-1}\right) \ge \mathbb{P}_{r_n \sim \mu}\left(J(r_n) \notin \mathcal{R}\big(w_{n-1}^{-1} I(t_{n-1}); S\big)\right) \ge 1 - 2/\sqrt{N}$$

임을 알 수 있다.

(2) 시나리오 (2-B-i)가 성립했을 경우: $I(t_k) \in \mathcal{C}(w_k W_k^{-1} W_{n-1}; S)$라는 사실에 보조정리 4.3을 적용하면 $\mathcal{R}\big(W_{n-1}^{-1} W_k w_k^{-1} I(t_k); S\big)$의 크기가 $2\sqrt{N}$ 이하라는 것을 알 수 있다. 또한 $J(r_n) \notin \mathcal{R}\big(W_{n-1}^{-1} W_k w_k^{-1} I(t_k); S\big)$인 경우,

$$J(r_n) \subseteq S^1 \setminus (\operatorname{int} W_{n-1}^{-1} W_k w_k^{-1} I(t_k)) \subseteq W_{n-1}^{-1} W_k w_k^{-1} t_k^{-1} \mathcal{I} = W_{n-1}^{-1} W_{k-1} r_k s_k \mathcal{I} = W_{n-1}^{-1} L_{n-1}$$

가 성립한다. 이제 (1)에서와 비슷한 계산을 통해 $J(r_n) \subseteq W_{n-1}^{-1} L_{n-1}$일 확률이 최소 $1 - 2/\sqrt{N}$임을 알 수 있다.

(3) 시나리오 (2-B-ii)가 성립했을 경우: 그러면 $J(r_n)$이 $J_1, \ldots, J_N$ 중 그 무엇이든 $W_{n-1}^{-1} L_{n-1} = \mathcal{I}$에 속하기 때문에, 사건이 일어날 확률은 1이다.

이제 세 가능성에 대해 $I(t_n) \notin \mathcal{C}(w_n; S)$ 및 $J(r_n) \subseteq W_{n-1}^{-1} L_{n-1}$일 확률을 종합해 보면 확률이 $1 - 4/\sqrt{N}$ 이상이라고 결론지을 수 있다. □

이제 중추 회전 기법의 핵심인 보조정리를 하나 증명하겠다. 풀어서 말하자면, $P_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ 안에 들어있는 중추 시점에서만 $\mathbf{s}$의 선택지를 바꾼다면 중추 시점 집합은 전혀 변하지 않는다는 보조정리이다.

보조정리 4.11. *중선 달린 Schottky 집합 S, 양의 정수 n 및 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 원소 나열 $\mathbf{w} = (w_i)_{i=0}^n$을 고정한 뒤 S의 원소 나열 $\mathbf{r} = (r_i)_{i=1}^\infty, \mathbf{s} = (s_i)_{i=1}^\infty, \bar{\mathbf{s}} = (\mathbf{s}_i)_{i=1}^\infty, \mathbf{t} = (t_i)_{i=1}^\infty$를 생각하자. 이때 만약*

$$\text{각각의 } i \in \{1, \ldots, n\} \setminus P_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w}) \text{에 대해 } s_i = \bar{s}_i \text{ 임}$$

이 성립한다면, 각각의 $1 \le l \le n$에 대해 $P_l(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w}) = P_l(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{s}}, \mathbf{t}; \mathbf{w})$ 또한 성립한다.

Proof. 이 보조정리의 초보적인 경우로서 다음 명제를 생각해 보자.

주장 4.12. *상술한 바와 같이* $S, n, \mathbf{w}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \bar{\mathbf{s}}, \mathbf{t}$*를 정한 뒤,* $k \in P_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w})$*를 하나 뽑자. 만약* $l = k$*를 제외한 모든* l*에 대해* $s_l = \bar{s}_l$*가 성립한다면, 각각의* $1 \leq l \leq n$*에 대해* $P_l(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w}) = P_l(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{s}}, \mathbf{t}; \mathbf{w})$ *또한 성립한다.*

다시 말해, 중추 시점 하나를 골라 거기서만 $\mathbf{s}$의 선택지를 바꾼다면 각 단계별 중추 시점 집합 P_l은 변하지 않는다는 것이다. 이 주장을 가정하면, 보조정리의 세팅에서 $\mathbf{s}$에서 출발해 중추 시점 하나씩마다 선택지를 바꾸면서 $\bar{\mathbf{s}}$에 이르는 동안 P_l들이 변하지 않는다는 것을 관찰할 수 있어 증명이 끝난다.

이제 주장을 증명하는 일이 남았다. 이 증명 내내 $\mathbf{w}, \mathbf{r}, \mathbf{t}$는 쭉 고정되어 있으므로 표기상 이들을 생략하겠다. 먼저, k보다 작은 l에 대해서는 $P_l(\mathbf{s})$은 ($\mathbf{w}, \mathbf{r}, \mathbf{t}$ 및) $s_1, \ldots, s_{k-1}$에 대해서만 의존하기에 $P_l(\bar{\mathbf{s}})$과 다를 이유가 없다. 마찬가지로 L_l도 두 입력값에 대해 일치한다.

이제 $l = k$단계를 살펴보자. k는 $P_n(\mathbf{s})$의 원소이므로 (2-A)의 시나리오가 성립한다. 여기서

$$J(r_k) \subseteq W_{k-1}^{-1} L_{k-1}, \; I(t_k) \notin \mathcal{C}(w_k; S)$$

라는 두 조건은 오로지 ($\mathbf{w}, \mathbf{r}, \mathbf{t}$ 및) $s_1, \ldots, s_{k-1}$에만 의존한다. 따라서 s_k를 $\bar{s}_k$로 치환해도 이 정보는 그대로 유지되고, 따라서

$$P_k(\bar{\mathbf{s}}) = P_{k-1}(\bar{\mathbf{s}}) \cup \{k\} = P_{k-1}(\mathbf{s}) \cup \{k\} = P_k(\mathbf{s})$$

가 성립한다. 또한,

$$L_k(\mathbf{s}) = W_{k-1} r_k s_k \mathcal{I}, \; L_k(\bar{\mathbf{s}}) = W_{k-1} r_k \bar{s}_k \mathcal{I} = g \cdot W_{k-1} r_k s_k \mathcal{I} \quad (g := W_{k-1} r_k \bar{s}_k s_k^{-1} r_k^{-1} W_{k-1}^{-1})$$

이 성립하며, 각각의 $k \leq l \leq n$에 대해 $W_l(\bar{\mathbf{s}}) = g \cdot W_l(\mathbf{s})$라는 관계식을 관찰할 수 있다.

이제, $k < l \leq n$에 대해 귀납적으로 다음을 증명하겠다:

(1) 만약 입력값 $\mathbf{s}$에 대해 l단계에서 시나리오 (2-A)가 성립한다면, $\bar{\mathbf{s}}$를 입력해도 또한 그렇다.
(2) 만약 입력값 $\mathbf{s}$에 대해 l단계에서 시나리오 (2-B-i)가 성립한다면, $\bar{\mathbf{s}}$를 입력해도 또한 그렇다. 또, 두 입력값에 대한 $\max \mathcal{Q}$의 값은 같다.
(3) 시나리오 (2-B-ii)는 일어나지 않는다.
(4) 위의 모든 경우에서 $P_l(\mathbf{s}) = P_l(\bar{\mathbf{s}})$ 및 $L_l(\bar{\mathbf{s}}) = g L_l(\mathbf{s})$가 성립한다.

시작 케이스로서 $l = k$일 때의 항목 (4)는 이미 관찰했다는 것을 기억하자. 이제 $k < l \leq n$에 대해, $l-1$에 대한 항목 (4)를 가정하고 위 항목들을 증명하겠다. 먼저, $\mathbf{s}$에 대한 시나리오 (2-A)의 조건인

$$J(r_l) \subseteq W_{l-1}(\mathbf{s})^{-1} L_{l-1}(\mathbf{s}), \; I(t_l) \notin \mathcal{C}(w_l; S)$$

를 상기해 보자. 후자 조건은 $s_k \mapsto \bar{s}_k$의 치환에 의해 변할 이유가 없다. 또 귀납 가정에 따라

$$\big[J(r_l) \subseteq W_{l-1}(\mathbf{s})^{-1} L_{l-1}(\mathbf{s})\big] \Leftrightarrow \big[J(r_l) \subseteq W_{l-1}(\mathbf{s})^{-1} g^{-1} \cdot g L_{l-1}(\mathbf{s}) = W_{l-1}(\bar{\mathbf{s}})^{-1} L_{l-1}(\bar{\mathbf{s}})\big]$$

가 성립한다. 이를 종합하면 $\mathbf{s}$가 l단계에서 시나리오 (2-A)를 만족한다는 것과, $\bar{\mathbf{s}}$가 그러하다는 것은 동치다. 또 이 동치조건이 성립할 때

$$P_l(\bar{\mathbf{s}}) = P_{l-1}(\bar{\mathbf{s}}) \cup \{l\} = P_{l-1}(\mathbf{s}) \cup \{l\} = P_l(\mathbf{s})$$

및

$$L_l(\bar{\mathbf{s}}) := W_l(\bar{\mathbf{s}}) \cdot (t_l w_l)^{-1} \mathcal{I} = g W_l(\bar{\mathbf{s}}) \cdot (t_l w_l)^{-1} \mathcal{I} = g L_l(\mathbf{s})$$

까지 따라나온다.

만약 $\mathbf{s}$에 대해 시나리오 (2-B)가 성립한다면, 위 관찰에 따라 $\mathbf{s}'$ 또한 시나리오 (2-B)에 해당한다. 이때는 집합

$$\mathcal{Q}(\mathbf{s}) = \mathcal{Q}(\mathbf{s}; l) := \Big\{ i \in P_{l-1} : I(t_i) \notin \mathcal{C}\big(w_k \cdot W_i(\mathbf{s})^{-1} W_l(\mathbf{s}); S\big) \Big\}$$

를 들여다봐야 한다. 그런데 $i \geq k$에 대해서는 $W_i(\bar{\mathbf{s}}) = gW_i(\mathbf{s})$임을 기억하자. 이는 곧

$$\mathcal{Q}(\mathbf{s}; l) \cap \{k, k+1, \ldots, l-1\} = \mathcal{Q}(\bar{\mathbf{s}}; l) \cap \{k, k+1, \ldots, l-1\}$$

임을 의미한다. 그런데 k가 $P_n(\mathbf{s})$에 살아남아 있음에 유의하자. 이는 l단계에서 k가 중추 집합에서 탈락해서는 안 된다는 뜻이다. 다시 말해, 설령 시나리오 (2-B)에 해당하더라도 $\mathcal{Q}(\mathbf{s}; l)$는 반드시 k 이상인 원소를 포함하게 된다. 이로써 시나리오 (2-B-ii)는 배제된다.

그러면 $\mathcal{Q}(\bar{\mathbf{s}}; l) \cap \{k, k+1, \ldots, l-1\} = \mathcal{Q}(\mathbf{s}; l) \cap \{k, k+1, \ldots, l-1\}$ 또한 공집합이 아니다. $\mathcal{Q}(\mathbf{s})$ 및 $\mathcal{Q}(\bar{\mathbf{s}})$의 최대 원소는 이 (공집합이 아닌) 공통된 윗쪽 부분집합에서 잡히므로, 최대 원소끼리도 서로 같다. 이 공통된 최대 원소를 u라고 두면

$$P_l(\bar{\mathbf{s}}) = P_{l-1}(\bar{\mathbf{s}}) \cap \{1, \ldots, u\} = P_{l-1}(\mathbf{s}) \cap \{1, \ldots, u\} = P_l(\mathbf{s})$$

및

$$L_l(\bar{\mathbf{s}}) := W_u(\bar{\mathbf{s}}) \cdot (t_u w_u)^{-1} \mathcal{I} = gW_u(\mathbf{s})(t_u w_u)^{-1} \mathcal{I} = gL_l(\mathbf{s})$$

이 성립한다. 마지막 식에서는 u가 k 이상임을 사용한 것이다. 이로써 증명이 끝난다. □

이제 중추 회전에 의한 동치류를 정의할 수 있다.

정의 4.13. *정의 4.4의 세팅에서와 같이 중선 달린 Schottky 집합 S 및* Homeo(S^1) *안의 나열 $\mathbf{w}$를 하나 고정하자. 더하여, 양의 정수 n도 하나 고정하자. 이제 $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$가 살고 있는 전체 집합 $S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}}$에 다음과 같은 동치 관계를 선언하겠다:*

$$\big[(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \sim_n (\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{t}})\big] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \text{각각의 } i \in \mathbb{Z}_{>0} \setminus \{n+1\} \text{ 에 대해 } r_i = \bar{r}_i \text{ 및 } t_i = \bar{t}_i \text{이고,} \\ \text{각각의 } i \in \mathbb{Z}_{>0} \setminus P_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w}) \text{에 대해 } \bar{s}_i = s_i \text{ 임} \end{array} \right]$$

이것이 실제로 동치 관계가 된다는 것이 보조정리 4.5 및 보조정리 4.11의 내용이다. 여기서 주의할 것은, $\sim_n$이라는 동치 관계는 n에 따라 달라진다는 것이다.

표기법에 조금 자유를 두어, $S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}}$라는 가측 공간에서의 좌표 성분들을 $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$로 표현하겠다. 이말은 곧 $r_1, r_2, \ldots, s_1, s_2, \ldots, t_1, t_2, \ldots$라는 표기를 사용하겠다는 것이다. 이제 $\sim_n$으로 주어진 동치류 $\mathcal{E} \subseteq S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}}$를 임의로 하나 생각해 보자. 그러면 $\mathcal{E}$의 모든 원소들은 공통된 n단계 중추 시점 집합 P_n을 가지는데, 이 집합을 $P_n(\mathcal{E})$이라고 표기하겠다. 그러면 $\mathcal{E}$ 위에서, r_i 및 t_i는 $i = n+1$에 대해서는 제약 없이 S의 임의의 원소를 값으로 가질 수 있고, $n+1$이 아닌 i에 대해서는 고정된 값을 가진다. $\mathcal{E}$ 위에서 s_i는 $i \in P_n(\mathcal{E})$에 대해서는 S의 임의의 원소를 값으로 가질 수 있고, 그렇지 않은 i에 대해서는 값이 고정된다.

이는 측도를 얹은 다음에 더 잘 드러난다. S 위에 분포된 확률 측도 μ를 하나 생각한 뒤 전체 공간 $S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}}$ 위에 μ의 곱공간을 생각해 보자. 즉 모든 r_i, s_i, t_i들이 독립적으로 μ-분포를 가진다는 것이다. 이제 이 측도를 $\mathcal{E}$에 제한해 보면, $\{r_i, t_i : i \neq n+1\}$, $\{s_i : i \notin P_n(\mathcal{E})\}$는 모두 상수 변수인 한편 $\{s_i : i \in P_n(\mathcal{E})\}$, $\{r_{n+1}, t_{n+1}\}$은 모두 서로 독립이면서 μ로 분포되어 있다.

명제 4.14. *중선 달린 분해능 N짜리 Schottky 집합 S와 그 위에 Schottky-균일하게 분포된 확률측도 μ를 하나 고정하자. 또* $\mathrm{Homeo}(S^1)$ *안의 나열* $\mathbf{w}$ *및 양의 정수 n을 고정한 뒤, $S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}}$ 안에서 $\sim_n$이 이루는 동치류 $\mathcal{E}$를 하나 고정하자. 그러면 각 $j \geq 0$에 대해*

$$\mathbb{P}_{\{r_i, s_i, t_i \,:\, i>0\} \text{ 모두가 독립적으로 } \mu\text{로 분포}} \left(\#P_{n+1}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w}) < \#P_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w}) - j \,\middle|\, \mathcal{E} \right) \leq (4/\sqrt{N})^{j+1}$$

가 성립한다.

Proof. 표기상의 편의를 위해, 동치류 $\mathcal{E}$의 (모든 원소가 공통으로 가지는) n단계 중추 시점 집합 $P_n(\mathcal{E})$을 $\{i(M) < i(M-1) < \ldots < i(2) < i(1)\}$로 나타내겠다. (여기서 M은 $\mathcal{P}_n(\mathcal{E})$의 크기다.) 여기서 M 및 $i(1), i(2), \ldots, i(M)$은 $\mathcal{E}$가 주어졌을 때부터 고정된 정보이고, $\{w_i : i > 0\}, \{r_i, t_i : i \neq n+1\}, \{s_i : i \notin P_n(\mathcal{E})\}$ 또한 고정된 정보임을 관찰하라. 즉 $\mathcal{E}$의 원소들은 $(s_{i(M)}, \ldots, s_{i(1)}, r_{n+1}, t_{n+1})$라는 좌표들로 특정되는데, 이 좌표 변수들은 서로 독립적인 μ-분포를 가진다.

이제

$$\begin{aligned} A_0 &\subseteq S \times S, \\ A_1(r_{n+1}, t_{n+1}) &\subseteq S, \\ A_2(s_{i(1)}, r_{n+1}, t_{n+1}) &\subseteq S, \\ &\cdots, \\ A_M(s_{i(M-1)}, \ldots, s_{i(1)}, r_{n+1}, t_{n+1}) &\subseteq S \end{aligned}$$

라는 집합들을 건설한 뒤 다음을 증명할 것이다.

주장 4.15. *(1)* $\mathbb{P}_{\mu \times \mu}(A_0) \geq 1 - 4/\sqrt{N}$.

(2) 임의의 선택지 $(s_{i(M)}, \ldots, s_{i(1)}, r_{n+1}, t_{n+1}) \in S^{M+2}$에 대해, 만약 $(r_{n+1}, t_{n+1}) \in A_0$라면

$$\#P_n(s_{i(M)}, \ldots, s_{i(1)}, r_{n+1}, t_{n+1}) = \#P_n(s_{i(M)}, \ldots, s_{i(1)}) + 1$$

이 성립한다.

(3) 임의의 $1 \leq l \leq M$ 및 임의의 $(s_{i(l-1)}, \ldots, s_{i(1)}, r_{n+1}, t_{n+1}) \in S^{l+1}$에 대해

$$\mathbb{P}_{s_{i(l)} \sim \mu} \left(s_{i(l)} \in A_l(s_{i(l-1)}, \ldots, s_{i(1)}, r_{n+1}, t_{n+1}) \right) \geq 1 - 4/\sqrt{N}$$

가 성립한다.

(4) 임의의 선택지 $(s_{i(M)}, \ldots, s_{i(1)}, r_{n+1}, t_{n+1}) \in S^{M+2}$ 및 $1 \leq l \leq M$에 대해, 만약 $s_{i(l)}$가 $A_l(s_{i(l-1)}, \ldots, s_{i(1)}, r_{n+1}, t_{n+1})$의 원소라면

$$\#P_n(s_{i(M)}, \ldots, s_{i(1)}, r_{n+1}, t_{n+1}) \geq \#P_n(s_{i(M)}, \ldots, s_{i(1)}) - l$$

이 성립한다.

이 주장을 가정한 상태에서 본 명제를 증명해 보자. 이를 위해

$$B_0 := \left\{ (\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \in \mathcal{E} : (r_{n+1}, t_{n+1}) \notin A_0 \right\}$$

를 먼저 정의한 뒤 각 $l = 1, \ldots, M$마다 귀납적으로

$$B_l := \left\{ (\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \in B_{l-1} : s_{i(l)} \notin A_{l-1}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w}) \right\}$$

라고 두자. 그러면 주장 4.15(3)에 의해

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathcal{E}}\left(B_l\right) &= \int_{(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t})\in B_{l-1}} \mathbb{P}_{s_{i(l)}\sim\mu}\left(s_{i(l)}\notin A_{l-1}\,\middle|\, s_{i(l-1)},\ldots,s_{i(1)},r_{n+1},t_{n+1}\right) d\mu(s_{i(l-1)})\cdots d\mu(s_{i(1)})\,d\mu(r_{n+1})\,d\mu(t_{n+1}) \\ &\le \frac{4}{\sqrt{N}}\cdot\mathbb{P}_{\mathcal{E}}\left(B_{l-1}\right)\end{aligned}$$

가 성립하고, 또 주장 4.15(1)에 의해 $\mathbb{P}_{\mathcal{E}}(B_0)\le\frac{4}{\sqrt{N}}$이 성립한다. 이를 결합하면, $l=0,\ldots,M$에 대해 $\mathbb{P}_{\mathcal{E}}(B_l)\le(4/\sqrt{N})^{l+1}$임을 확인할 수 있다.

다음으로,

$$(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t})\in\mathcal{E}\setminus B_0 \Rightarrow \#P_n(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t};\mathbf{w})\ge\#P_n(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t};\mathbf{w})$$

가 성립하고, 또 각각의 $l=1,\ldots,M$마다

$$(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t})\in B_{l-1}\setminus B_l \Rightarrow \#P_n(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t};\mathbf{w})\ge\#P_n(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t};\mathbf{w})-l$$

임을 관찰할 수 있다. 이는 다시 말해 각각의 l마다

$$(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t})\in\mathcal{E}\setminus B_l \Rightarrow \#P_n(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t};\mathbf{w})\ge\#P_n(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t};\mathbf{w})-l$$

라는 것이다. 위에서 B_l의 확률이 $(4/\sqrt{N})^{l+1}$ 이하라는 것을 확인했으므로 명제의 증명이 끝난다.

이제 주장을 증명하는 일이 남았다. 먼저 A_0에 관해서는 보조정리 4.10에서 이미 관찰했는데, $(s_{i(M)},\ldots,s_{i(1)})$의 값이 그 무엇으로 정해졌든 간에, $\#P_{n+1}=\#P_n+1$이게끔 r_{n+1},t_{n+1}가 값을 가질 확률이 $1-4/\sqrt{N}$보다 크다는 것을 증명했었다. 더 나아가, $\#P_{n+1}=\#P_n+1$이게끔 하는 r_{n+1},t_{n+1}들의 값은 $(s_{i(M)},\ldots,s_{i(1)})$의 정체에 무관하다는 것을 증명하겠다. $\mathcal{E}$에 한정해서 볼 때, $\#P_{n+1}(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t};\mathbf{w})=\#P_n(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t};\mathbf{w})+1$일 필요충분조건은 $I(t_{n+1})\in\mathcal{C}(w_{n+1};S)$ 및 $J(r_{n+1})\subseteq W_n^{-1}L_n\mathcal{I}$이다. 여기서,

$$W_n^{-1}L_n\mathcal{I}=\begin{cases}\begin{aligned}&W_n^{-1}W_{\max P_n-1}r_{\max P_n}s_{\max P_n}\mathcal{I}\\ &=\left(t_{i(1)}w_{i(1)}r_{i(1)+1}s_{i(1)+1}t_{i(1)+1}w_{i(1)+1}\cdots r_ns_nt_nw_n\right)^{-1}\mathcal{I}\end{aligned} & (P_n(\mathcal{E})\neq\emptyset\text{일 때})\\ \mathcal{I} & (P_n(\mathcal{E})=\emptyset\text{일 때})\end{cases}$$

의 값은 $\mathcal{E}$ 위에서 고정되어 있기에, $\#P_{n+1}=\#P_n+1$라는 사건은 $s_{i(1)},\ldots,s_{i(M)}$의 선택지에 무관하게 오로지 r_{n+1} 및 s_{n+1}의 값에만 의존하는 것이다. 이로써 A_0의 구성 및 주장 4.15(1), (2)가 증명되었다.

이제 임의의 $l\in\{1,\ldots,M\}$ 및 임의의 $(s_{i(l-1)},\ldots,s_{i(1)},r_{n+1},t_{n+1})\in S^{l+1}$에 대해

$$\begin{aligned}A_l &:= \left\{s\in S: I(s)\notin\mathcal{C}\left(t_{i(l)}w_{i(l)}\cdot W_{i(l)}^{-1}W_{n+1};S\right)\right\}\\ &=\left\{s\in S: I(s)\notin\mathcal{C}\left(t_{i(l)}w_{i(l)}\cdot(r_{i(l)+1}s_{i(l)+1}t_{i(l)+1}w_{i(l)+1})\cdots(r_ns_nt_nw_n)\cdot(r_{n+1}s_{n+1}t_{n+1}w_{n+1});S\right)\right\}\end{aligned}$$

를 정의하겠다. $\{r_i,t_i:i\neq n\}$ 및 $\{s_i:i\notin P_n(\mathcal{E})\}$가 모두 고정된 값이라는 것을 상기하면, 이 집합의 정체가 $s_{i(l-1)},\ldots,s_{i(1)}$ 및 r_{n+1},t_{n+1}의 값에만 의존한다는 것을 알 수 있다. 또한 보조정리 4.3에 의해 $\mathbb{P}_\mu(A_l)\ge1-2/\sqrt{N}$임을 알 수 있다.

이제 어떤 $(s_{i(M)},\ldots,s_{i(1)},r_{n+1},t_{n+1})\in S^{M+2}$의 값에 대해 $s_{i(l)}\in A_l(s_{i(l-1)},\ldots,s_{i(1)},r_{n+1},t_{n+1})$가 성립한다고 가정하자. 그러면 정의에 의해

$$\#\left\{j:\bar{I}(s_{i(l)})\cap t_{i(l)}w_{i(l)}\cdot W_{i(l)}^{-1}W_{n+1}\bar{J}_j\neq\emptyset\right\}\ge\sqrt{N} \tag{4.1}$$

가 성립한다. 한편, 보조정리 4.6에 의해

$$W_{i(l+1)-1}r_{i(l+1)}s_{i(l+1)}t_{i(l+1)}\left(S^1\setminus I(t_{i(l+1)})\right)\supseteq W_{i(l)-1}r_{i(l)}\mathcal{I}$$

가 성립한다. 한편, Schottky 집합 S와 그 중선 $\mathcal{I}$의 성질에 의해 $s_{i(l)}I(s_{i(l)}) \supseteq S^1 \setminus \mathcal{I}$가 성립한다. 이 두 사실을 조합하면

$$W_{i(l+1)}w_{i(l+1)}^{-1}\bar{I}(t_{i(l+1)}) \subseteq \operatorname{int}\left(S^1 \setminus W_{i(l)-1}r_{i(l)}\mathcal{I}\right) \subseteq W_{i(l)-1}r_{i(l)}s_{i(l)}I(s_{i(l)})$$

가 성립한다. 이 사실과 부등식 4.1를 조합하면

$$\#\left\{j : \bar{I}(t_{i(l+1)}) \cap (W_{i(l+1)}w_{i(l+1)}^{-1})^{-1} \cdot (W_{i(l)-1}r_{i(l)}s_{i(l)}) \cdot t_{i(l)}w_{i(l)} \cdot W_{i(l)}^{-1}W_{n+1}\bar{J}_j \neq \emptyset\right\} \geq \sqrt{N}$$

를 얻는다. 이는 곧 $I(t_{i(l+1)}) \in \mathcal{C}\left(w_{i(l+1)} \cdot (W_{i(l+1)})^{-1} \cdot W_{n+1}; S\right)$를 의미하기에, $n+1$단계 중추 시점 집합을 구성할 때의 시나리오 (2-B)에서 $\mathcal{Q}$가 $i(l+1)$를 포함한다는 것을 의미한다. 따라서 $P_{n+1}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$는 최소한 $P_n(\mathcal{E}) \cap \{1, \ldots, i(l+1)\} = \{i(M) < \ldots < i(l+1)\}$를 포함하고, $\#P_{n+1} \geq \#P_n - l$이라는 결론에 도달한다. 이로써 주장 4.15(3), (4)가 증명되었기에 전체 증명이 끝난다. □

따름정리 4.16. *중선 달린 분해능 N짜리 Schottky 집합 S와 그 위에 Schottky-균일하게 분포된 확률 측도 μ를 하나 고정하고,* Homeo(S^1) *안의 나열* $\mathbf{w}$*도 하나 고정하자. 이제* $S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}}$ *위에* μ*의 곱측도를 얹었을 때, 임의의 정수* $j, k, n \geq 0$*에 대해*

$$\mathbb{P}\left(\#P_{n+1}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w}) < k - j \,\middle|\, \#P_{n+1}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w}) = k\right) \leq (4/\sqrt{N})^{j+1} \tag{4.2}$$

가 성립한다.

Proof. 먼저 n을 고정한 뒤 $(S^{\mathbb{Z}_{>0}})^3$ 위에 동치관계 $\sim_n$를 주면, 각 동치류 위에서는 n단계 중추 시점 집합 P_n이 상수이기 때문에 그 크기 $\#P_n$ 또한 상수이다. 그러니 $\#P_n = k$인 동치류들 각각 위에서 부등식 4.2을 관찰하기만 하면 충분하다. 이는 명제 4.14가 얘기하는 것이다. □

따름정리 4.17. *중선 달린 분해능 N짜리 Schottky 집합 S와 그 위에 Schottky-균일하게 분포된 확률 측도 μ를 하나 고정하고,* Homeo(S^1) *안의 나열* $\mathbf{w}$*도 하나 고정하자. 또,*

$$\mathbb{P}(X_i = j) = \begin{cases} (N-4)/N & \textit{if } j = 1, \\ (N-4)4^{-j}/N^{-j+1} & \textit{if } j < 0, \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases} \tag{4.3}$$

라는 분포를 가지는 서로 독립인 실수 확률변수 $X_1, X_2, \ldots$를 생각하자. 이제 $S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}}$ 위에 μ의 곱측도를 얹었을 때, 임의의 양의 정수 n에 대해 $\#P_n$는 $X_1 + \ldots + X_n$보다 분포적으로 우세한다. 그말인즉,

$$\textit{임의의 양수 } T\textit{에 대해 } \mathbb{P}(\#P_n(s) \geq T) \geq \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n \geq T)$$

라는 뜻이다.

Proof. $P_1, \ldots, P_n$이 정의되는 공간 $S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}}$으로부터도 독립적이게끔 수식 4.3을 따르는 확률변수 X_i를 정의하자. 그러면 보조정리 4.10 및 따름정리 4.16를 종합해 보았을 때, 임의의 $0 \leq k \leq n$ 및 임의의 $i, j \geq 0$에 대해

$$\mathbb{P}\left(\#P_{k+1}(s) \geq i + j \,\middle|\, \#P_k(s) = i\right) \geq \begin{cases} 1 - \frac{4}{N} & \text{if } j = 1, \\ 1 - \left(\frac{4}{N}\right)^{-j+1} & \text{if } j < 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

가 성립한다. 따라서, 0 이상인 값만을 갖는 확률변수 U_k를 잡아 $\#P_{k+1} - U_k$와 $\#P_k + X_{k+1}$의 분포가 같게끔 할 수 있다.

이제 $k = 1, \dots, n$ 각각마다 임의의 양의 정수 i에 대해 $\mathbb{P}(\#P_k \geq i) \geq \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_k \geq i)$임을 증명하겠다. $k = 1$의 경우에는 $\#P_{k-1} = 0$이 항상 성립하기에 부등식 4.4으로부터 주장이 따라 나온다. 다음으로 k에 대한 주장을 가정했을 때,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\#P_{k+1} \geq i) \geq \mathbb{P}(\#P_k + X_{k+1} \geq i) &= \sum_j \mathbb{P}(\#P_k \geq j)\,\mathbb{P}(X_{k+1} = i - j) \\
&\geq \sum_j \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k \geq j)\,\mathbb{P}(X_{k+1} = i - j) \\
&= \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k + X_{k+1} \geq i)
\end{aligned}$$

를 관찰할 수 있다. 이로써 증명이 끝난다. □

따름정리 4.18. *중선 달린 분해능 $N \geq 2500$짜리 Schottky 집합 S와 그 위에 Schottky-균일하게 분포된 확률측도 μ를 하나 고정하고,* $\mathrm{Homeo}(S^1)$ *안의 나열* $\mathbf{w}$*도 하나 고정하자. 이제 $S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}}$ 위에 μ의 곱측도를 얹었을 때,*

$$\mathbb{P}\left(\#P_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w}) \leq n/2\right) \leq \left(3\sqrt[4]{4/N}\right)^n \leq 0.6^n$$

이 성립한다.

Proof. Chebyshev 부등식을 바탕으로 증명해 보자. 먼저 수식 4.4에서 정의한 X_i를 상기하자. 이때 다음이 성립한다:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sqrt{4/N}^{X_i}\right] &= \left(1 - \frac{4}{N}\right) \cdot \left[\sqrt{\frac{4}{N}} + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{N}{4}}^j \cdot \left(\frac{4}{N}\right)^j\right] \\
&= \left(1 - \frac{4}{N}\right)\sqrt{\frac{4}{N}}\left(1 + \frac{1}{1 - \sqrt{4/N}}\right) \\
&= 2\sqrt{4/N} + \sqrt{4/N}^2 - \sqrt{4/N}^3 \leq 3\sqrt{4/N}.
\end{aligned}$$

여기서 마지막 부등식은 $\sqrt{4/N} \leq 1$을 이용한 것이다. 이제 따름정리 4.17 및 X_i들의 독립성을 이용하면

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{4/N}^{\#P_n(\mathbf{s})}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sqrt{4/N}^{\sum_{i=1}^n X_i}\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\sqrt{4/N}^{X_i}\right] \leq \left(3\sqrt{4/N}\right)^n.$$

이제 Chebyshev 부등식에 의해

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{4/N}^{\#P_n(\mathbf{s})}\right] \geq \mathbb{P}(\#P_n(\mathbf{s}) \leq n/2) \cdot \sqrt{4/N}^{n/2}.$$

이 성립한다. 이 두 부등식을 결합해 결론에 다다를 수 있다. □

이제 최종적으로 명제 3.9을 증명하겠다.

명제 3.9의 증명 보조정리 4.1에 비추어 보았을 때, 다음 명제만 증명하면 충분하다.

주장 4.19. *중선 달린 분해능 $N \geq 2500$짜리 Schottky 집합 S 및 S 위에서 Schottky-맞춤 균일 분포를 가지는 확률측도 μ를 생각하자. 더하여, 임의의 양의 정수 n 및* $\mathrm{Homeo}(S^1)$ *안의 임의의 나열* $\mathbf{w} = (w_i)_{i=0}^{\infty}$*를 생각한 뒤, 확률공간 $\Omega = S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}} \times S^{\mathbb{Z}_{>0}}$에 μ의 곱측도를 얹어 주자. 그러면 Ω의 가측 부분집합 A, A의 가측 분할 $\mathcal{P} = \{\mathcal{E}_\alpha\}_\alpha$, 그리고* $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 원소들을 값으로 가지는 확률변수들 $\{w'_i\}_{i=0,\ldots,\lfloor n/2\rfloor}, \{s'_i\}_{i=1,\ldots,\lfloor n/2\rfloor}$이 존재하여 다음을 만족한다.*

(1) $\mathbb{P}(A) \geq 1 - 0.6^n$.

(2) $\mathcal{P}$*를 이루는 각 동치류* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}$*에 한정해서 보았을 때,* $w_0', \ldots, w_{\lfloor n/2 \rfloor}$*는 각각 고정된 위상동형 사상들이고* s_i'*들은 독립적으로* μ*-분포를 가지는 확률변수들이다.*

(3) A *위에서* $w_0 r_1 s_1 t_1 w_1 \ldots r_n s_n t_n w_n = w_0' s_1' w_1' \cdots s_{\lfloor n/2 \rfloor}' w_{\lfloor n/2 \rfloor}'$*가 성립한다.*

먼저, 따름정리 4.18에 의해

$$\mathbb{P}\left(A := \left\{(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \in (S^{\mathbb{Z}_{>0}})^3 : \#P_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w}) > n/2\right\}\right) \geq 1 - 0.6^n$$

이 성립한다. 다음으로, $(S^{\mathbb{Z}_{>0}})^3$ 위에

$$\left[(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \sim_n' (\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{t}})\right] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{각각의 } i \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ 에 대해 } r_i = \bar{r}_i \text{ 및 } t_i = \bar{t}_i\text{이고,} \\ P_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{w})\text{의 가장 작은 } n/2\text{개의 중추 시점이 아닌 모든 } i\text{에 대해 } \bar{s}_i = s_i\text{임} \end{bmatrix}$$

라는 동치 관계를 선언하겠다. 보조정리 4.11에서 관찰한 바와 같이, 어떤 중추 시점에서의 $\mathbf{s}$의 좌표를 바꾸는 것은 (n단계) 중추 시점 집합을 바꾸지 않고, 따라서 "가장 작은 $n/2$개의 중추 시점"이라는 개념 또한 보존된다. 이러한 연유로 $\sim_n'$는 실제로 $(S^{\mathbb{Z}_{>0}})^3$ 위의 동치 관계가 된다. 또한, 각 동치류 위에서 중추 시점 집합의 크기는 일정하므로, 각각의 동치류는 A에 완전히 포함되거나 A 바깥에 있다. 즉, A는 특정 동치류들의 합집합으로 나타낼 수 있고, 따라서 $\sim_n$는 A 위의 동치관계로 간주할 수 있다.

이제 A 안에 있는 한 $\sim_n$-동치류 $\mathcal{E}$를 고정하면, 그 원소들은 모두 동일한 n단계 중추 시점 집합 $P_n(\mathcal{E})$를 가지는데 편의상 $P_n(\mathcal{E}) = \{i(1) < i(2) < \ldots)\}$로 나타내겠다. 여기서 $\mathcal{E} \subseteq A$이므로 $P_n(\mathcal{E})$는 최소한 원소 $n/2$개를 가짐에 유의하라. 이제

$$\begin{aligned}
w_0' &:= W_{i(1)-1} r_{i(1)} = w_0 \cdot r_1 s_1 t_1 w_1 \cdots r_{i(1)-1} s_{i(1)-1} t_{i(1)-1} w_{i(1)} r_{i(1)}, \\
w_l' &:= t_{i(l)} w_{i(l)} W_{i(l)}^{-1} W_{i(l+1)-1} r_{i(l+1)} \\
&= t_{i(l)} w_{i(l)} \cdot r_{i(l)+1} s_{i(l)+1} t_{i(l)+1} w_{i(l)+1} \cdots r_{i(l+1)-1} s_{i(l+1)-1} t_{i(l+1)-1} w_{i(l+1)} r_{i(l+1)}, \quad (l = 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor) \\
w_{\lfloor n/2 \rfloor}' &:= t_{i(\lfloor n/2 \rfloor)} w_{i(\lfloor n/2 \rfloor)} W_{i(\lfloor n/2 \rfloor)}^{-1} W_n \\
&= t_{i(\lfloor n/2 \rfloor)} w_{i(\lfloor n/2 \rfloor)} \cdot r_{i(\lfloor n/2 \rfloor)+1} s_{i(\lfloor n/2 \rfloor)+1} t_{i(\lfloor n/2 \rfloor)+1} w_{i(\lfloor n/2 \rfloor)+1} \cdots r_m s_n t_n w_n
\end{aligned}$$

와 같이 정의하면, 동치관계 $\sim_n$의 정의상 $w_0', w_1', \ldots, w_M'$라는 위상동형사상들은 $\mathcal{E}$ 위에서 고정되어 있다. 또한, 각각의 $l = 1, \ldots, M$에 대해 $w_l' \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$가 성립한다는 것은 보조정리 4.6에서 관찰했다. 또한 동치관계의 정의상, $\mathcal{E}$ 위에서 $s_l' := s_{i(l)}$들은 서로 독립적으로 μ-분포를 가진다. 마지막으로,

$$w_0' s_1' w_1' \cdots s_{\lfloor n/2 \rfloor}' w_{i(M)}' = w_0 r_1 s_1 t_1 w_1 \cdots r_n s_n t_n w_n$$

이 $\mathcal{E}$ 위에서 성립함은 분명하다. 이로써 증명이 끝난다. □

5. 국소적으로 균일한 지수함수적 감소

이제 다음을 관찰하자.

정리 5.1. *양수* ϵ *자연수* N *및* $\mathrm{Homeo}(S^1)$ *위에 정의된* (ϵ, N)*–Schottky 맞춤 측도* μ*가 주어졌을 때,* (ϵ, N)*–Schottky 맞춤 측도로 이루어진* μ*의 근방이 존재한다.*

Proof. 원 위의 서로 겹치지 않는 닫힌 구간 I_1, I_2, J_1, J_2에 대해, $\mu^{*N}(\mathfrak{S}(I_1, I_2)) > \epsilon$ 및 $\mu^{*N}(\mathfrak{S}(J_1, J_2)) > \epsilon$을 만족한다고 하자. 이때, 충분히 작은 $\epsilon' > 0$에 대해서는 I_1, I_2, J_1, J_2 각각의 (닫힌) ϵ'-근방들 또한

서로 겹치지 않는다. 이 근방들을 I_1', I_2', J_1', J_2'로 표시하자. 이제 $\mathrm{Homeo}(S^1)$ 위의 함수 f를

$$f(\phi) := \max\left(1 - \frac{1}{\epsilon'} d_\infty\big(\phi, \mathfrak{S}(I_1, I_2)\big),\, 0\right)$$

로 정의하면, 이 함수는 유계이고 $\mathcal{C}^0$-위상을 기준으로 보았을 때 연속이다. 또, 임의의 확률 측도 η에 대해

$$\eta\big(\mathfrak{S}(I_1, I_2)\big) \le \mathbb{E}_\eta[f] \le \eta\big(\mathfrak{S}(I_1', I_2')\big)$$

가 성립한다.

이제 $\mathcal{U}_1 := \{\eta : \mathbb{E}_\eta[f] > \epsilon\}$은 μ를 포함하는 열린 집합인 한편, $\mathcal{U}_1$의 임의의 원소 η는 $\eta(\mathfrak{S}(I_1', I_2')) \ge \mathbb{E}_\eta[f] > \epsilon$을 만족한다. 비슷한 방식으로 μ의 근방 $\mathcal{U}_2$를 정의해 각각의 $\eta \in \mathcal{U}_2$마다 $\eta(\mathfrak{S}(J_1', J_2')) > \epsilon$이게끔 할 수 있다. 그러면 $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ 역시 μ의 근방인데, 그 각각의 원소는 $\mathfrak{S}(I_1', I_2')$ 및 $\mathfrak{S}(J_1', J_2')$에 ϵ보다 큰 값을 할당한다.

한편, [Sie76, Proposition 3.1]에 따르면 합성곱 함수(convolution)

$$*N : \mathcal{P}(\mathrm{Homeo}(S^1)) \times \ldots \times \mathcal{P}(\mathrm{Homeo}(S^1)) \to \mathcal{P}(\mathrm{Homeo}(S^1))$$

는 연속이다. $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$가 μ^{*N}을 포함하는 열린 집합이므로, $*N$에 의한 그 역상 $(*N)^{-1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$는 μ의 충분히 작은 근방 $\mathcal{N}$의 N회 곱 $\mathcal{N} \times \cdots \times \mathcal{N}$을 포함한다. 다시 말해, μ의 충분히 작은 근방의 임의의 원소 $\mu' \in \mathcal{N}$은 $\mu'^{*N} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$를 만족하므로 (ϵ, N)-구간용 Schottky 맞춤 측도이다. $\square$

References

[Ghy01] Étienne Ghys. Groups acting on the circle. *Enseign. Math. (2)*, 47(3-4):329–407, 2001.

[Gou22] Sébastien Gouëzel. Exponential bounds for random walks on hyperbolic spaces without moment conditions. *Tunis. J. Math.*, 4(4):635–671, 2022.

[GV24] Martín Gilabert Vio. Probabilistic tits alternative for circle diffeomorphisms. *arXiv preprint arXiv:2412.08779*, 2024.

[Mal17] Dominique Malicet. Random walks on $\mathrm{Homeo}(S^1)$. *Comm. Math. Phys.*, 356(3):1083–1116, 2017.

[Mar00] Gregory Margulis. Free subgroups of the homeomorphism group of the circle. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(9):669–674, 2000.

[Sie76] Eberhard Siebert. Convergence and convolutions of probability measures on a topological group. *Ann. Probability*, 4(3):433–443, 1976.

Cornell University, 583 Malott Hall, Ithaca, NY, USA

Email address: inhyeokchoi48@gmail.com