

시작하기 전에

이 논문은 [Cho21]의 한국어 버전이나, 직역한 것은 아니며 추가적인 설명이 몇 군데 있다는 것을 밝힙니다. 통용되는 한국어 단어가 있는 수학 용어는 별도의 설명 없이 한국어로 썼고, 그렇지 않은 경우에는 다음 표에 정리하거나 혹은 첫 등장 시 영어 용어를 병기했습니다.

한국어	영어
쌍곡 공간	hyperbolic space
랜덤 워크	random walk
등거리사상	isometry
이동 길이	translation length
적절성	properness
분리 가능하다	separable
측지적인	geodesic (adj.)
측지성	geodesicity
준가법적	subadditive
한정된	bounded
받침	support
한계	bound
상한/하한	upper/lower bound
최소 상한	supremum
매물	embedding
궤도	orbit
준군	semigroup
엽층	foliation
컴팩트-맞춤	cocompact

쌍곡 공간 및 TEICHMÜLLER 공간에서의 중심극한정리 및 측지선 따라가기

최인혁

ABSTRACT. 우리는 본 논문에서 Gromov 쌍곡 공간 및 Teichmüller 공간에서의 랜덤 워크를 다룬다. 먼저, 랜덤한 등거리사상의 이동 길이가 중심극한정리를 만족한다는 것과 랜덤 워크의 분산이 유한하다는 것과 동치임을 보인다. 이 과정에서 Benoist와 Quint의 정리, 즉 기준점의 변위에 관한 중심극한정리를 재발견하며, 그 역 또한 증명한다. 이들에 대응하는 중첩 로그 법칙 또한 얘기한다. 마지막으로, $(1/2)$ -모멘트가 유한한 랜덤 워크는 선형 오차보다 더 가까이 측지선을 따라간다는 것과, 지수적 모멘트가 유한한 랜덤 워크는 로그 오차 내로 측지선을 따라간다는 것을 증명한다.

핵심 단어. 랜덤 워크, Gromov 쌍곡 공간, Teichmüller 공간, 약한 쌍곡 공간, 중심극한정리

MSC classes: 20F67, 30F60, 57M60, 60G50

1. 서론

이 논문에서 (X, d) 는 적절성, 분리 가능성 및 측지성을 가정하지 않은 Gromov 쌍곡 공간 혹은 중수 2 이상의 Teichmüller 공간을 가리킨다. 또, X 의 한 점 o 를 고정하겠다. 여기 등장하는 모든 측도는 확률 측도다. μ 는 항상 X 의 등거리사상 군 G 위에 주어진 초등적이지 않은 (*non-elementary*) 이산 확률 측도를 가리키며, $\omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$ 는 μ 가 생성한 랜덤 워크를 나타낸다(자세한 사항은 2.3항을 참고하라).

G 의 각 원소 g 는 동역학적인 값 두 가지와 연관되어 있는데, 바로 o 의 변위 $d(o, go)$ 및 이동 길이 $\tau(g) := \lim_n \frac{1}{n} d(o, g^n o)$ 이다. 변위는 고전적인 랜덤 워크에서 나타나는 확률 변수들의 합과 같은 역할을 하는 반면, 이동 길이에 대응하는 Euclidean 세팅에서의 개념은 없다. 한 가지 기억해 둘 것은 사상류 (*mapping class*)의 이동 길이가 행렬의 고유값과 같은 역할을 한다는 점인데, 이들은 모두 랜덤 워크와 같이 연구되어 왔다.([Thu88], [Gui90], [Kar14])

변위는 준가법적이기에, μ 의 첫번째 모멘트가 유한할 때 Kingman의 준가법적 에르고딕 정리는 $d(o, \omega_n o)$ 에 대한 큰 수의 법칙(*law of large numbers*)을 암시한다. 더 자세히 말하면, $\frac{1}{n} d(o, \omega_n o)$ 가 L^1 -관점에서 및 거의 확실히 (*almost surely*) 수렴해 가는 양수 λ 가 존재한다. Gromov 쌍곡 공간에서는 μ 가

유한한 첫번째 모멘트를 가지는 것이 필수적임을 Gouëzel이 최근에 [Gou21]에서 증명했다 — 만약 μ 가 무한한 첫번째 모멘트를 가지면, 랜덤 워크는 그 어떤 유한한 속도보다도 빠르게 탈출한다.

더 강한 모멘트 조건이 있다면, $\frac{1}{\sqrt{n}}(d(o, \omega_n o) - n\lambda)$ 의 극한 분포를 다루는 중심극한정리(*central limit theorem*) 또한 얘기할 수 있다. [BQ16]에서 Benoist와 Quint는 X 가 적절하고 quasicconvex한 Gromov 쌍곡 공간일 때 중심극한정리를 증명했다. 이 결과는 [Hor18]에서 Horbez가 일반화했는데, X 가 Teichmüller space일 때 중심극한정리를 증명한 것이 그 내용이다. 또 다른 접근법은 Mathieu와 Sisto가 [MS20]에서 제안한 것인데, X 의 가장자리 구조에 의존하지 않는 방법이다.

Euclidean 세팅에서는 더 나아가 랜덤 워크의 $\sqrt{n \log \log n}$ 급에서의 거의 확실한/확률상에서의 점근 현상을 대조해 주는 중첩 로그 정리(*law of the iterated logarithm*)를 얘기할 수 있다. 이는 지금까지는 Gromov 쌍곡 공간 혹은 Teichmüller 공간에서는 얘기된 바가 없다.

한편, 이동 길이는 준가법적이지 않기에 이를 조사하는 것은 더 어려운 일이다. Gromov 쌍곡 공간에서는, Maher와 Tiozzo가 [MT18]에서 이동 길이가 확률상(*in probability*) 선형적으로 증가한다는 것을 밝혔다. 그들은 μ 가 한정된 받침을 가지면 오차 확률이 지수적으로 감소한다는 것 또한 얘기했는데, 이는 확률상 증가를 거의 확실한 증가로 강화시켜 준다. Dahmani와 Horbez는 [DH18]에서 이 아이디어를 일반화해, Teichmüller 공간에서의 랜덤 등거리사상에 대한 스펙트럼 정리(*spectral theorem*)를 증명했다. Baik, Kim과 저자는 [BCK21]에서 같은 결과를 더 약한 모멘트 조건에서 증명했는데, μ 가 유한한 첫번째 모멘트를 가진다고 가정한 것이다.

저자가 알고 있는 한, 이동 길이에 대한 중심극한정리는 받침이 유한한 상황에서만 다루어졌다. 예를 들어, 군의 유한한 생성 집합(*generating set*)을 고정한 상황에서, [GTT19]와 [GTT20]는 Cayley 그래프에서의 단어 거리(*word metric*)를 기준으로 센 이동 길이의 극한 분포를 얘기한다. 여기서 선형 군에서의 최근 결과를 하나 살펴볼 만하다 — Aoun은 [Aou20]에서 랜덤 행렬의 matrix norm에 대한 중심극한정리로부터 고윳값에 대한 중심극한정리를 이끌어냈다.

우리의 첫 목표는 랜덤 워크의 이동 길이를 더 자세히 묘사하는 것이다. 유한한 첫번째 모멘트를 가정한 상태에서의 결과를 하나 소개하겠다.

Theorem A (로그적 차이). μ 가 유한한 첫번째 모멘트를 가진다고 하자. 그러면 거의 모든 ω 에 대해

$$(1.1) \quad \limsup_n \frac{1}{\log n} |\tau(\omega_n) - d(o, \omega_n o)| < K$$

가 성립하게 하는 상수 $K < \infty$ 가 존재한다.

변위에 대한 중심극한정리를 가정하면, Theorem A은 이동 길이에 대한 중심극한정리를 암시한다.

Theorem B (중심극한정리). μ 가 산술적이지 않으며(non-arithmetic) 유한 분산을 가진다고 하자. 그러면 $\frac{1}{\sqrt{n}}(d(o, \omega_n o) - n\lambda)$ 와 $\frac{1}{\sqrt{n}}(\tau(\omega_n) - n\lambda)$ 가 분포상(in law) 수렴해 가는 비자명한 Gaussian 분포가 존재한다.

Benoist-Quint 이론과 달리, Theorem B에 대한 우리의 접근법은 martingale에 의존하지 않는다. 그 대신 [MS20]에서와 같이, i.i.d. 확률 변수를 결합을 감안하고 더하는 과정을 통해 증명한다. 일단 결합에 대한 통제를 얻고 난 이후에는, 이 과정은 완전히 확률적이고 X 나 G 의 기하학적인 성질에 의존하지 않는다. 한편, 결합은 중추 시점(pivotal time)에서 방향 전환(pivot)을 함으로써 통제할 것인데, 이는 [Gou21]과 [BCK21]의 아이디어를 결합한 것이다. 이 과정은 점들 간의 Gromov 부등식에만 의존하므로, X 가 적절하다거나, quasi-convex하다거나, 분리 가능하다는 가정은 하지 않는다. 또한, G 의 작용이 비원통형(acylindrical)이라거나 μ 가 유한한 지수적 모멘트를 가진다고 가정하지도 않는다.

우리의 접근법은 중심극한정리의 역 또한 이끌어 낸다.

Theorem C (중심극한정리의 역). μ 가 무한한 두번째 모멘트를 가진다고 하자. 그러면 $\frac{1}{\sqrt{n}}(d(o, \omega_n o) - \mathbb{E}[d(o, \omega_n o)])$ 도 $\frac{1}{\sqrt{n}}(\tau(\omega_n) - \mathbb{E}[\tau(\omega_n)])$ 도 분포상 수렴할 수 없다.

Theorem A에 관련된 더 까다로운 문제로는 Kaimanovich [Kai00]와 Tiozzo [Tio15]가 생각한 측지선 따라가기 (혹은 선 근사하기) 현상이 있다. 이들은 유한한 첫번째 모멘트를 갖는 랜덤 워크가 측지선들에 선형 이하로 가까이 있다는 것을 증명했다.

더 강한 모멘트 조건이 있으면 랜덤 워크가 더 바짝 측지선을 따라갈 수도 있다. 다음 랜덤 워크들이 측지선을 로그 오차 내로 따라간다는 것을 상기하자.

- (1) 유한한 지수적 모멘트를 갖는 자유군 위에서의 랜덤 워크 [Led01].
- (2) 유한한 받침을 갖는 Gromov 쌍곡 공간 위에서의 대칭적인 랜덤 워크 [BHM11].
- (3) 상대적 쌍곡 공간 위에서의 단순 랜덤 워크 [Sis17].
- (4) 유한한 받침을 갖는 Gromov 쌍곡 공간 위에서의 랜덤 워크 [MT18].

이제 이 결과들을 일반화한 결과를 하나 제시하겠다.

Theorem D (측지선 따라가기). X 가 측지적인 공간이라고 하자.

- (1) 어떤 $p > 0$ 에 대해 μ 가 유한한 p -모멘트를 가진다고 하자. 그러면 거의 모든 ω_n 에 대해, 유사측지선(quasi-geodesic) γ 가 존재하여

$$\lim_n \frac{1}{n^{1/2p}} d(\omega_n o, \gamma) = 0$$

가 성립한다.

- (2) μ 가 유한한 지수적 모멘트를 가진다고 하자. 그러면 상수 $K' < \infty$ 가 존재하여 다음을 만족시킨다. 거의 모든 ω_n 에 대해, 유사측지선 γ 가 존재하여

$$\limsup_n \frac{1}{\log n} d(\omega_n o, \gamma) < K'.$$

가 성립한다.

- (3) 만약 X 가 적절하기까지 하다면, γ 를 측지선으로 잡을 수도 있다.

특히, μ 가 유한한 (1/2)-모멘트를 가지기만 해도 선형 오차보다 가까운 따라가기를 보이는데, 이는 저자가 알고 있는 한 자유군 위의 랜덤 워크에 대해서조차도 새로운 결과이다. 이와 관련된 [MS20]의 관찰을 기록해 두겠다.

Remark 1.1. [Gou21]에서와 같이, 논의상의 편의를 위해 여기서는 이산 확률 측도만을 다루기로 하겠다. Schottky 집합 위에 균등 측도를 주는 대신 Schottky 확률 분포를 정교하게 잡으면, 같은 증명이 Borel 측도에도 적용될 것이라고 저자는 생각한다.

마찬가지로, Theorem D의 결론 (1), (2)는 X 가 내재적(intrinsic)이기만 해도 얻을 수 있다.

이제 앞으로의 전략 및 선행 연구들과의 관련성을 설명하겠다. 이 논문의 주요 철학은 [Gou21]에서의 중추 시점 구성 및 [BCK21]에서의 방향 전환에서 비롯되었다. [Gou21]에서는, 중추 시점이 같은 경로들 간의 방향 전환을 이용해 랜덤 워크가 거의 확실하게 진전함을 증명했다. [BCK21]에서 방향 전환의 역할은 랜덤한 등거리사상의 이동 길이가 크다는 것을 보장하는 것이다. 거칠게 말하면, 중추 시점이 충분히 많은 경우 변위와 이동 길이는 거의 일치한다. 여기서 중추 시점의 풍부함을 [BCK21]에서는 준가법적 에르고딕 정리로부터 유도했지만, 우리는 대신 [Gou21]과 [BCK21]의 중추 시점 개념을 통합하여 Theorem A에서 더 강한 결과를 도출할 것이다.

먼저, Section 2에서 Gromov 쌍곡 공간 및 Teichmüller 공간에 관한 기초 지식을 복습하겠다. 그후 목격(witnessing)(Section 3), Schottky 집합(Subsection 4.1) 및 중추 시점(Subsection 4.2) 개념을 차례로 정립할 것이다. 비록 이 개념들은 [Gou21] 및 [BCK21]에서 등장했지만, (측지적인/측지적이지 않은) Gromov 쌍곡 공간 및 Teichmüller 공간의 경우를 통합하기 위해 이 개념들을 새로 적어낼 것이다.

Subsection 5.1에서는 중추 시점을 랜덤 워크에 적용시켜, 지수적으로 감소하는 확률을 제외하고서는 중추 시점이 충분히 많다는 것을 보일 것이다. Subsection 5.2는 이 사실로부터 따라 나오는 결과들을 다룬다. Theorem A을 먼저 증명하고 나서, μ 가 유한한 p -모멘트를 가질 때 랜덤한 경로가 고정된 방향으로부터 이탈하는 거리의 p -모멘트 한계를 잡을 것이다. 이는 [BQ16]에서

G 의 cocompact한 작용을 가정하고 관찰한 것인데, 여기서는 그 가정을 하지 않는다. 더 나아가, 독립적인 두 랜덤한 경로가 서로로부터 이탈하는 거리의 $2p$ -모멘트 한계 또한 잡을 것이다. 여기서의 두 배 지수가 가능하다는 것은 [MS20]에서 $p = 2$ 및 G 가 자신의 Cayley graph에 작용하고 있는 쌍곡 균일 때 관찰된 바 있다. 우리는 측지적이지 않은 세팅에서는 Gromov 내적을 이용해, 측지적인 세팅에서는 거리 $d(o, [\tilde{\omega}_n o, \omega_n o])$ 를 이용해 이 결과를 적어낼 것이다. 여기서 후자의 경우 Theorem D으로 이어진다.

Section 6에서는 [MS20]의 철학을 따라, $p = 2$ 에서의 이탈 거리 한계를 가지고 (사실은 $p = 1$ 의 이탈 거리 한계로 충분하다) 중심 극한 정리(Theorem B)를 증명할 것이다. 여기서는 ([MS20]에서의 경우들을 포함하는) 산술적이지 않은 측도를 다루므로, 먼저 비산술성으로부터 $d(o, \omega_n o)$ 의 조절된 분산이 하한을 가진다는 것을 보일 것이다. 그 후 [MS20]에서와 같이 독립적인 결합을 가지는 이진 항 덧셈을 진행할 것이다. 또한 중추 시점을 구성함으로써 중심극한정리의 역 또한 얻어낼 것이다 (Theorem C).

감사의 말 저자는 Hyungryul Baik, Sébastien Gouëzel, Camille Horbez, Dongryul M. Kim과 함께 한 논의에서 많은 도움을 얻었기에 이에 감사를 표하고자 합니다. 특히, Gouëzel이 제기한 중심극한정리의 역에 대한 질문은 Theorem C를 고안하고 증명하게 된 원동력이 되었습니다. 더하여, Çağrı Sert로부터 참고 문헌을 추천받고 이 논문과 관련된 역사적 배경을 설명받았기에 이 또한 감사를 표하고자 합니다.

본 연구는 삼성미래기술육성사업 No. SSTF-BA1702-01으로부터 지원을 받아 수행되었습니다.

2. 기초 지식

2.1. Gromov 쌍곡 공간 이 항에서는 Gromov 쌍곡 공간에 관련된 기본적인 정의들을 되새길 것이다. 더 자세한 내용은 [GdlH90], [Väi05] 및 [BH13]을 참고하라.

Definition 2.1. 거리 공간 (M, d) 와 세 점 $x, y, z \in M$ 가 주어졌을 때, x 에 대한 y, z 의 Gromov 내적(Gromov product)은

$$(2.1) \quad (y, z)_x = \frac{1}{2}[d(x, y) + d(x, z) - d(y, z)]$$

로 주어진다. M 이 δ -쌍곡적(δ -hyperbolic)이라는 것은 M 안의 모든 네 점 x, y, z, w 가 Gromov 부등식(Gromov inequality)라고 불리는 다음 부등식을 만족시킨다는 것이다:

$$(2.2) \quad (x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta.$$

어떤 $\delta > 0$ 에 대해 X 가 δ -쌍곡적이면 X 가 Gromov 쌍곡적(Gromov hyperbolic)이라고 얘기한다.

Gromov 내적에 관련된 다음 기초적인 사실들을 증명 없이 기술하겠다.

Fact 2.2 ([Väi05, Lemma 2.8]). *거리 공간 M 과 그 안의 네 점 x, y, z, w 에 대해 다음이 성립한다:*

$$(y, y)_x = 0,$$

$$(y, z)_x = (z, y)_x,$$

$$d(x, y) = (y, z)_x + (x, z)_y,$$

$$0 \leq (y, z)_x \leq d(x, y),$$

$$-d(x, w) \leq (y, z)_x - (y, z)_w = d(x, w) - (y, x)_w - (z, x)_w \leq d(x, w).$$

본 논문에서 대부분의 논증은 Gromov 부등식만을 참조한다. 그러나 측지선 따라감 현상에서는 점들을 잇는 측지선 혹은 유사측지선이 고려되어야 하기에 다음 개념을 생각하겠다.

거리 공간 M 위의 측지선분(*geodesic segment*)라는 것은 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 M 으로 향하는 등거리 매물 $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ 을 일컫는 말이다. 또, 사상 $t \mapsto \gamma(a + b - t)$ 를 γ 의 뒤집음(*reverse*)이라 부르고 $\bar{\gamma}$ 로 나타낸다. 표기 편의상, γ 의 이미지 $\gamma([a, b])$ 를 $\gamma(a)$ 와 $\gamma(b)$ 를 잇는 측지선분이라고도 부르겠다. 단, 측지선분들은 방향이 주어져 있다고 간주될 것이고, γ 와 $\bar{\gamma}$ 는 구분되어야 한다. 또, a 에서 시작하고 b 에서 끝나는 임의의 측지선을 $[a, b]$ 로 표기하겠다.

$\gamma_1 : [c, d] \rightarrow M$ 이 γ 의 부분 선분이라는 것은 $\gamma_{[c, d]} = \gamma_1$ 이라는 뜻이다. γ 의 부분 선분 $\gamma_1 : [c, d] \rightarrow M$ 이 다른 부분 선분 $\gamma_2 : [c', d'] \rightarrow M$ 보다 먼저 등장한다(*appears earlier than*)는 것은 $d < c'$ 라는 뜻이다. 표기 편의상, $[\gamma_1(c), \gamma_1(d)]$ 가 $[\gamma(a), \gamma(b)]$ 의 부분 선분이라고도 부른다.

Definition 2.3. *거리 공간 M 안의 임의의 두 점이 측지선으로 이어질 수 있을 때 M 이 측지적(*geodesic*)이라고 얘기한다. M 안의 임의의 두 점 x, y 와 임의의 양수 ϵ 에 대해 x 와 y 가 길이 $d(x, y) + \epsilon$ 이하인 곡선으로 이어질 수 있을 때 M 이 내재적(*intrinsic*)이라고 얘기한다. M 의 한정되고 닫힌 부분집합들이 모두 콤팩트하다면 M 을 적절하다(*proper*)고 얘기한다.*

증명 없이 기본적인 사실 몇 가지를 더 나열하겠다.

Fact 2.4. *측지적인 공간 M 과 그 안의 점 x, y, z, w , $a \in [x, y]$, $b \in [x, z]$ 에 대해 다음이 성립한다:*

$$(y, z)_x \geq d(w, x) - d(a, w) - d(b, w),$$

$$(y, z)_x \leq d(x, [y, z]).$$

측지적인 공간에서는, Gromov 쌍곡성은 여러 측면에서 얘기할 수 있다. 구체적으로, 측지선 삼각형들이 날씬하거나(*slim*), 얇거나(*slim*), 안쪽 크기(*insize*)가 작아야 함을 요구할 수가 있다. 여기에서는 다음 사실이 필요할 것이다.

Fact 2.5 (cf. [BH13, Proposition III.H.1.17, III.H.1.22]). δ -쌍곡적인 측지적 공간 M 과 그 안의 점 x, y, z, w 에 대해 다음이 성립한다:

- (1) $p \in [y, z]$ 이면 $d(p, [x, y]) \leq 6\delta$ 이거나 $d(p, [y, z]) \leq 6\delta$ 이다.
- (2) 어떤 $C > 0$ 에 대해 $d(x, z) \leq C$ 이고 $d(y, w) \leq C$ 이면, $[x, y]$ 와 $[z, w]$ 는 Hausdorff 거리상 $2C + 12\delta$ 이내에 있다.

이제부터 논문 내내 $\delta > 0$ 을 고정하겠다.

이 항 나머지 동안, δ -쌍곡적인 공간 X 를 하나 고정하겠다. G 는 X 의 등거리사상 군을 나타낸다는 것을 기억하라.

Definition 2.6. G 의 원소 g 의 이동 길이(translation length)라는 것은

$$\tau(g) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} d(o, g^n o).$$

로 정의된다.

X 위의 등거리사상의 동역학적 성질을 논하기 위해 X 의 자연스러운 가장자리 구조를 다음과 같이 정의하겠다.

Definition 2.7. X 안의 점의 나열 $(x_n)_{n>0}$ 이 무한대로 향한다(converges to infinity)는 것은 $m, n \rightarrow \infty$ 일 때 $(x_n, x_m)_o \rightarrow \infty$ 라는 의미다. 두 나열 $(x_n), (y_n)$ 이 같은 무한대 점으로 향한다(converging to the same infinity point)는 것은 $m, n \rightarrow \infty$ 일 때 $(x_n, y_m)_o \rightarrow \infty$ 라는 의미다.

같은 무한대 점으로 향해 가는 나열의 동치류의 모임을 X 의 Gromov 경계(Gromov boundary)라고 부르며 ∂X 로 나타낸다. X 안의 점의 나열 (x_n) 이 $[(y_n)] \in \partial X$ 로 수렴한다는 것은 (x_n) 와 (y_n) 가 같은 무한대 점으로 향한다는 것을 의미한다.

$g \in G$ 의 X 위에서의 작용은 $[(x_n)] \mapsto [(gx_n)]$ 라는 ∂X 위의 작용으로 이어진다.

Definition 2.8. g 가 X 위에서 한정된 궤도를 가지면 g 가 타원적(elliptic)이라고 얘기한다. g 가 타원적이지 않고 ∂X 위에서 유일한 고정점을 가질 때, g 를 포물적(parabolic)이라고 얘기한다. g 가 ∂X 위에서 끌개(attractor) 하나와 밀개(repeller) 하나, 총 두 개의 고정점을 가질 때 g 를 쌍곡적(loxodromic)이라고 얘기한다.

여기서 G 가 정확히 타원적, 포물적, 쌍곡적 원소들로 분할된다는 사실이 성립한다. 더욱이, 쌍곡적인 원소들은 그 이동 거리가 양수다.

Definition 2.9. X 위의 두 쌍곡적인 등거리사상 g, h 가 독립적(independent)이라는 것은 서로 겹치지 않는 고정점 집합을 가진다는 뜻이다.

다음 표기법은 측지적인 공간과 측지적이지 않은 공간의 경우를 통합하기 위한 것이다. X 가 측지적이지 않을 때, X 위의 선분(segment) $[x, y]$ 는 X 안의 점 x, y 를 묶은 순서쌍 $\gamma = (x, y)$ 를 일컫는 것이다. X 가 측지적일 때는, x 에서 y 로 향하는 임의의 측지선 γ 를 일컫는 것이다. 어느 경우에서든, x 는 시작점(initial point), y 는 종착점(terminal point)이라고 부른다. 여기서 $[x, y]$ 의 길이(length)는 $d(x, y)$ 로 정의된다. 선분들 $\gamma = [x, y]$, $\eta = [x, w]$ 및 점 z 에 대해, $(y, z)_x$ 와 $(y, w)_x$ 라는 값들을 각각 $(\gamma, z)_*$ 및 $(\gamma, \eta)_*$ 로 나타낸다.

2.2. Teichmüller 공간 이 항에서 X 는 종수가 2 이상이고 방향이 주어질 수 있는 닫힌 곡면 Σ 의 Teichmüller 공간 $\mathcal{T}(\Sigma)$ 를 나타내고 d 는 Teichmüller 거리를 나타낸다.

Teichmüller의 정리에 의해 X 는 단일 측지적인즉, 임의의 두 점은 유일한 측지선분으로 이을 수 있다. Teichmüller 측지선 및 이차 미분 형식(quadratic differentials)에 관해서는 [IT12]와 [Hub16]를 참조하라.

X 는 Gromov 쌍곡적이지 않다는 것이 알려져 있으나 [MW95], 그 등거리사상 군의 동역학적인 성질은 쌍곡 공간에서의 것과 닮아 있다. $\mathcal{T}(\Sigma)$ 의 등거리사상 군은 Σ 의 사상류 군(mapping class group) $\text{Mod}(\Sigma)$ 이다([Roy71], [EK74a], [EK74b]). Nielsen-Thurston 분류는 사상류들이 주기적이거나(periodic), 환원 가능하거나(reducible), 혹은 pseudo-Anosov이라는 사실을 얘기하는데, 여기서 pseudo-Anosov 사상류들은 쌍곡 공간 위의 쌍곡적인 등거리사상에 대응한다. 앞으로 pseudo-Anosov 사상류 또한 쌍곡적이라고 얘기할 것이다.

Thurston은 X 에 자연스러운 가장자리 구조로서 Σ 위의 사영된 측도 달린 엽층(projective measured foliation)들의 모임 $\mathcal{PMF}(\Sigma)$ 를 생각했다(cf. [FLP79]). 쌍곡 공간에서와 같이, $\text{Mod}(\Sigma)$ 또한 $\mathcal{PMF}(\Sigma)$ 에 작용하고 pseudo-Anosov 사상류들은 $\mathcal{PMF}(\Sigma)$ 위에서 고정점 두 개를 가진다. 이 고정점들을 이용해, Definition 2.9에서와 같이 독립적인 사상류들을 정의할 수 있다.

더 자세히 살펴 보면, pseudo-Anosov 사상류 $[\phi]$ 의 \mathcal{PMF} 위에서의 고정점들은 단일 에르고딕(uniquely ergodic)하며 $[\phi]$ 의 pseudo-Anosov 대표 사상 ϕ 에 대한 안정한/불안정한 엽층과 같다. 또한, 이 끝점들은 양방향으로 무한히 뻗은 Teichmüller 측지선으로 이을 수 있는데, 이 측지선은 $[\phi]$ 의 작용에 의해 고정되며 $[\phi]$ 의 이동 축(translation axis)라고 불린다. 이것을 $[\phi]$ 로 잘랐을 때의 길이는 $[\phi]$ 의 이동 길이와 같으며 ϕ 의 늘임 계수(stretch factor)의 로그 값의 두 배이다.

X 의 ϵ -굵은 영역, 즉 가장 짧은 extremal length가 ϵ 이상인 곡면들의 모임을 $X_{\geq \epsilon}$ 으로 나타낸다. [Ker80]에서의 Kerckhoff의 공식에 의해, $\epsilon' = \epsilon e^{-2d(x, y)}$ 이라 두면 $x \in X_{\geq \epsilon}$ 은 $y \in X_{\geq \epsilon'}$ 를 암시한다.

X 위의 측지선분 $\gamma : [0, L] \rightarrow X$ 와 $\gamma' : [0, L'] \rightarrow X$ 를 생각하자. 만약 $|L - L'| < \epsilon/2$ 이고 $t \in [0, L] \cap [0, L']$ 일 때 $d(\gamma(t), \gamma'(t)) < \epsilon/2$ 가 성립하면 γ 와 γ' 가 ϵ -바짝 붙어간다(ϵ -fellow travel)고 얘기한다. 여기서 ϵ -바짝 붙어가는 측지선들은 Hausdorff 거리 ϵ 이내에 있음을 주목하라. 특히, 대응되는 끝점끼리도 거리 ϵ 이내에 있다. 정의로부터 다음 사실들은 곧장 따라온다.

Fact 2.10. $[x, y]$ 와 $[x', y']$ 가 ϵ -바짝 붙어가고 $[x', y']$ 와 $[w, z]$ 가 ϵ' -바짝 붙어가면, $[x, y]$ 와 $[w, z]$ 는 $(\epsilon + \epsilon')$ -바짝 붙어간다.

Fact 2.11. x, y, z 가 같은 측지선상에 있고 $[x, z]$ 와 $[x', z']$ 가 ϵ -바짝 붙어간다고 하자. 그러면 $[x, y]$ 와 $[x', z']$ 는 $[\epsilon + 2d(z, y)]$ -바짝 붙어간다.

Gromov 쌍곡 공간에서의 측지선들과 달리, Teichmüller space의 측지선들은 대응되는 끝점끼리 가깝다고 해서 항상 바짝 붙어가는 것은 아니다. 그럼에도, Rafi의 다음 정리들은 몇몇 구성 요소들이 ϵ -굵기만 하면 측지선들이 바짝 붙어간다는 것 혹은 측지선 삼각형 현상이 얇다는 것을 보장해 준다.

Theorem 2.12 ([Raf14, Theorem 7.1]). 양수 $C > 0$ 가 주어질 때마다 다음 성질을 만족시키는 상수 $\mathcal{B}(\epsilon, C)$ 를 잡을 수 있다: $x, y \in X_{\geq \epsilon}$ 가

$$d(x, x') \leq C \quad \text{and} \quad d(y, y') \leq C,$$

를 만족시키면, $[x, y]$ 와 $[x', y']$ 는 $\mathcal{B}(\epsilon, C)$ -바짝 붙어간다.

Theorem 2.13 ([Raf14, Theorem 8.1]). 다음 성질을 만족시키는 상수 $\mathcal{C}(\epsilon)$ 와 $\mathcal{D}(\epsilon)$ 가 존재한다. 측지선 $[x, y]$ 이 길이 $\mathcal{C}(\epsilon)$ 이상인 부분선분 $\gamma \subseteq X_{\geq \epsilon}$ 를 포함하게끔 점 $x, y, z \in X$ 가 주어졌다고 하자. 그러면

$$\min \{d(w, [x, z]), d(w, [z, y])\} < \mathcal{D}(\epsilon).$$

이 성립하는 점 $w \in \gamma$ 가 존재한다.

Lemma 2.14. X 위의 ϵ -굵은 측지선분 $[x, y]$ 와 점 z 가 주어졌다고 하자. 이때 $M = \max\{d(p, y) : p \in [x, y], d(p, [y, z]) \leq \mathcal{D}(\epsilon)\}$ 로 두면 다음이 성립한다:

$$(x, z)_y \leq M + \mathcal{C}(\epsilon) + 2\mathcal{D}(\epsilon).$$

Proof. 최댓값 M 이 점 $p \in [x, y]$ 에서 얻어진다고 하고, $p' \in [y, z]$ 는 $d(p, p') \leq \mathcal{D}(\epsilon)$ 를 만족하는 점이라고 하자. 만약 $d(x, p) \leq \mathcal{C}(\epsilon)$ 이라면, $(x, z)_y \leq d(x, y) = d(x, p) + d(p, y) \leq \mathcal{C}(\epsilon) + M$ 가 성립한다.

만약 아니라면, p 의 왼쪽에 있으면서 $\mathcal{C}(\epsilon)$ 보다 긴 $[x, y]$ 의 부분선분 $[q_1, q_2]$ 를 생각하겠다. 여기서 $[q_1, q_2]$ 는 ϵ -굵고 $[y, z]$ 에 $\mathcal{D}(\epsilon)$ -가까운 $[q_1, q_2]$ 위의 점은 없다. 따라서, Theorem 2.13는 거리 $\mathcal{D}(\epsilon)$ 이내에 있는 점 $q \in [q_1, q_2]$ 와 $q' \in [x, z]$

가 존재한다는 것을 암시한다. 이로부터

$$\begin{aligned} (x, z)_y &= \frac{1}{2} [(d(x, q) + d(q, p) + M) + (d(y, p') + d(p', z)) - (d(x, q') + d(q', z))] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[(d(x, q) + d(q, p) + M) + (M + \mathcal{D}(\epsilon) + d(p', z)) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[-(d(x, q) - \mathcal{D}(\epsilon) + d(p', z) - 2\mathcal{D}(\epsilon) - d(p, q)) \right] \\ &\leq M + 2\mathcal{D}(\epsilon) + d(q_1, p) \end{aligned}$$

를 얻는다. 여기서 $d(q_1, p)$ 의 최대 하한을 잡음으로써 원하던 결과를 얻는다. \square

2.3. 랜덤 워크

Definition 2.15. ν 가 G 위의 이산 측도라고 하자. 이때 ν 의 받침(support)는 집합 $\{g \in G : \nu(g) \neq 0\}$ 을 의미하며 $\text{supp } \nu$ 로 나타낸다. $\text{supp } \nu$ 가 생성하는 준군(the semigroup generated by $\text{supp } \nu$) $\langle\langle \text{supp } \nu \rangle\rangle$ 는 집합 $\{g_1 \cdots g_n : n \in \mathbb{N}, g_i \in \text{supp } \nu\}$ 를 의미한다. ν 가 초등적이지 않다(non-elementary)는 것은 $\langle\langle \text{supp } \nu \rangle\rangle$ 이 독립적인 쌍곡적인 원소 두 개를 가지고 있다는 뜻이고, ν 가 산술적이지 않다(non-arithmetic)는 것은 적당한 $N > 0$ 에 대해, 이동 길이가 다른 두 원소가 $\text{supp } \nu^N$ 에 포함된다는 뜻이다.

ν 의 p 번째 모멘트를

$$\mathbb{E}_\nu[d(o, go)^p] = \int d(o, go)^p d\nu(g)$$

로 정의한다. 또한, 매개변수 $K > 0$ 에 대한 ν 의 지수적 모멘트를

$$\mathbb{E}_\nu[e^{Kd(o, go)}] = \int e^{Kd(o, go)} d\nu(g)$$

로 정의한다.

G 위의 측도 ν 에 대해, ν 를 n 번 복제한 G^n 위의 곱측도(product measure)를 ν^n 으로 나타내고, ν 을 n 회 자기합성한 G 위의 합성측도를 ν^{*n} 으로 나타낸다. 곱공간 G^n 위의 확률변수 $f = (f_1, \dots, f_n)$ 에 대해, 합성 $f_1 \cdots f_n$ 을 f^* 로 나타낸다.

μ 가 생성하는 G 위의 랜덤 워크는 다음과 같이 만들어진다. 배경 공간은 G 의 가산 곱 공간에 μ 의 가산 곱 측도를 얹은 발걸음 공간(step space) $(G^{\mathbb{Z}}, \mu^{\mathbb{Z}})$ 이다. 각 발걸음 자취(step path) (g_n) 는

$$\omega_n = \begin{cases} g_1 \cdots g_n & n > 0 \\ id & n = 0 \\ g_0^{-1} \cdots g_{n+1}^{-1} & n < 0, \end{cases}$$

로 주어지는 G 위의 샘플 자취 (ω_n) 를 만들어 낸다. 이는 전이 확률(transition probability)가 μ 인 랜덤 워크를 구성한다. 그러면 발걸음 공간 위에

Bernoulli 옮김(Bernoulli shift) $T : (g_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (g_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ 은 $T : (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (\omega_1^{-1} \omega_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ 를 유도한다. 이어, $\check{g}_n = g_{-n+1}^{-1}$ 및 $\check{\omega}_n = \omega_{-n}$ 라는 표기법을 도입하겠다. $\check{\omega}_n = \check{g}_1 \cdots \check{g}_n$ 임과, $(g_n)_{n>0}$, $(\check{g}_n)_{n>0}$ 가 독립적임을 눈여겨 보라.

다음 조작은 나중에 등장할 Schottky 집합과 같이 사용될 것이다. $n > 0$ 을 고정하고, G^n 위의 적당한 확률 측도 η, ν 및 상수 $0 < \alpha < 1$ 대해 $\mu^n = \alpha\eta + (1 - \alpha)\nu$ 가 성립한다고 가정하자. 이제 아래 확률 변수들을 모두 독립적 이계끔 잡자:

- $\mathbb{P}(\rho_i = 1) = \alpha$ 이고 $\mathbb{P}(\rho_i = 0) = 1 - \alpha$ 인 Bernoulli 확률변수 ρ_i ,
- η 를 확률 분포로 가지는 η_i ,
- ν 를 확률 분포로 가지는 ν_i .

이를 이용해

$$\gamma_i = \begin{cases} \nu_i & \rho_i = 0 \text{ 일 때,} \\ \eta_i & \rho_i = 1 \text{ 일 때.} \end{cases}$$

를 정의하면, γ_i 는 i.i.d.이고 $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ 는 μ^{nk} 를 확률 분포로 가진다. 또한, 각 i 에 대해 $(g_{n(i-1)+1}, \dots, g_{ni}) = \gamma_i$ 가 성립하게 하는 μ 를 확률 분포로 가지는 i.i.d. g_i 를 잡을 수 있다.

앞으로의 논의에서, Ω 는 $\rho_i, \nu_i, \eta_i, g_i$ 가 그 위에서 모두 가측(measurable)이도록 하는 배경 확률 공간을 지칭한다. ω 는 Ω 의 원소를 나타내는 글자로 남겨둘 것이다. 또한 고정할 것은 다음과 같다:

- $\omega_k := g_1 \cdots g_k$,
- $\mathcal{N}(k) := \sum_{i=1}^k \rho_i$,
- $\vartheta(i) := \min\{j \geq 0 : \mathcal{N}(j) = i\}$.

3. 목격과 정렬

δ -쌍곡 공간에서는, 점들 간의 Gromov 내적이 작다는 성질은 전이적이지 않다. 구체적으로, 각 i 에 대해 $(a_{i-1}, a_{i+1})_{a_i} < C$ 라고 해서 모든 $i < j < k$ 에 대해 $(a_i, a_k)_{a_j} < C$ 인 것은 아니다. 다만 만약 인접한 점들간의 거리가 떨어져 있다는 가정이 추가되면, $i < j < k$ 에 대해 $(a_i, a_k)_{a_j} < C + \delta$ 가 성립한다. 그럼에도, Gromov 내적이 약간 증가하는 것은 피할 수 없다. 이런 이유로 우리는 위 성질을 만족하는 점들의 ‘사슬’을 기록할 것이며 Gromov 내적은 필요해지는 순간에만 계산할 것이다. (자세한 사항은 [Gou21]을 참조하라)

Teichmüller 공간에서는 상황이 더 까다로워지는데, 이를 해결하기 위해 Rafi가 제시한 부분적인 쌍곡성을 이용할 것이다. 따라서 여기서는 잘 정렬된 굵은 측지선분들에게 ‘목격된’ 측지선들의 사슬을 기록할 것이다. 조금 더 복잡한 이 기록 방식은 주로 Teichmüller 공간을 위한 것이지만, δ -쌍곡 공간에도 적용할 수 있다. 그럼에도, δ -쌍곡 공간이 관심사인 독자들은 [Gou21]에 소개된 사슬 조건 및 중추 시점 구성을 사용해도 된다.

앞에서 얘기한 바와 같이, X 는 δ -쌍곡 공간 혹은 Teichmüller 공간을 가리킨다. 전자의 경우, X 의 모든 점은 모든 $\epsilon > 0$ 에 대해 ϵ -굽다고 간주할 것이다. 후자의 경우, Subsection 2.2에서 정의된 개념들을 준용할 것이다.

Definition 3.1 (δ -쌍곡 공간에서의 목적). δ -쌍곡 공간 X , 상수 $D > 0$ 및 X 위의 선분 $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n], [x, y]$ 를 생각하자. 이때, $[x, y]$ 가 $([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n])$ 에 의해 D -목적된다(D -witnessed by $([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n])$)는 것은 다음을 뜻한다:

- (1) $i = 1, \dots, n$ 에 대해 $(x_{i-1}, x_{i+1})_{x_i} < D$ (x_0 는 x 로, x_{n+1} 는 y 로 둔다),
- (2) $i = 1, \dots, n$ 에 대해 $(y_{i-1}, y_{i+1})_{y_i} < D$ (y_0 는 x 로, y_{n+1} 는 y 로 둔다),
- (3) $i = 1, \dots, n$ 에 대해 $(y_{i-1}, y_i)_{x_i}, (x_i, x_{i+1})_{y_i} < D$.

X 위의 선분 γ_1, γ_2 가 같은 시작점 x 를 가지고 $(\gamma_1, \gamma_2)_* < D$ 를 만족시키면 두 선분은 ($x \in X$ 에서) D -붙여졌다(D -glued)고 얘기한다.

Definition 3.2 (Teichmüller 공간에서의 목적). Teichmüller 공간 X , 상수 $D > 0$ 및 X 위의 측지선분 $\gamma_1, \dots, \gamma_m, \eta$ 를 생각하자. 만약 η 의 부분선분 η_1, \dots, η_m 이 존재해 η_{i-1} 이 η_i 보다 먼저 등장하고 η_i 와 γ_i 가 D -바짝 붙어간다면, η 가 $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ 에 의해 D -목적된다(D -witnessed by $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$)고 한다.

X 위의 선분 γ_1, γ_2 가 같은 시작점 x 를 가지고 $(\gamma_1, \gamma_2)_* < D$ 를 만족시키면 두 선분은 ($x \in X$ 에서) D -붙여졌다(D -glued)고 얘기한다.

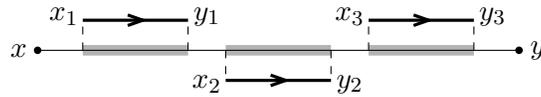


FIGURE 1. Teichmüller 공간에서의 D -목적. 여기서 $[x, y]$ 는 $([x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3])$ 에 의해 D -목적되고 있다.

다음 명제는 Gromov 부등식으로부터 바로 따라 나온다.

Lemma 3.3. δ -쌍곡 공간 X 위의 선분 $[x, y]$ 가 다른 선분들 $([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n])$ 에 의해 D -목적된다고 하자. 만약 각 $[x_i, y_i]$ 의 길이가 최소 $3D + 3\delta + 1$ 이라면, 각 $0 \leq i \leq j \leq k \leq n + 1$ 에 대해 $(x_i, x_k)_{x_j}, (y_i, y_k)_{y_j} < D + 2\delta$ 이다.

Lemma 3.4. 선분 $[x, y]$ 가 길이 $3D + 3\delta + 1$ 이상인 다른 선분들 $([x_i, y_i])_{i=1}^n$ $3D + 3\delta + 1$ 에 의해 D -목적된다고 하자. 그러면 다음이 성립한다:

$$d(x, y) \geq \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i) - 3nD - 4n\delta.$$

Proof. X 가 Teichmüller 공간일 때는 바깥 붙어가기의 정의로부터 결론을 바로 얻는다. X 가 δ -쌍곡 공간일 때는 다음이 성립한다:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(x_0, x_1) + \sum_{i=1}^n [d(x_i, x_{i+1}) - 2(x_0, x_{i+1})_{x_i}] \\ &\geq \sum_{i=1}^n d(x_i, x_{i+1}) - 2n(D + 2\delta) \geq \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i) - 3nD - 4n\delta. \quad \square \end{aligned}$$

다음 보조정리는 δ -쌍곡 공간에서 측지선 삼각형의 안쪽 크기가 항상 6δ 이하라는 사실로부터 따라 나온다. (참고: [BH13, Proposition III.H.1.22])

Lemma 3.5. X 가 측지적이라고 하자. 만약 선분 $[x_0, y_0]$ 이 다른 선분 $[x, y]$ 에 의해 D -목격되면 다음이 성립한다:

$$d(x, [x_0, y_0]), d(y, [x_0, y_0]) \leq D + 6\delta.$$

이제 ‘부분적인 목격’을 진짜 목격으로 승화시켜 주는 보조정리 두 개를 살펴볼 것이다.

Lemma 3.6 (내적이 작으면 목격된다 I). 각 $C, \epsilon > 0$ 에 대해, 다음을 만족시키는 상수 $D > C$ 가 존재한다. 만약 $x_0, x_1, y_0, y_1 \in X$ 에 대해

- (1) $[x_0, x_1], [y_0, y_1]$ 이 ϵ -굽고,
- (2) $(x_0, y_1)_{x_1}, (y_0, x_1)_{y_1} < C$ 이며,
- (3) $d(x_1, y_1) \geq d(x_0, x_1), d(y_0, y_1), 3D$

가 성립하면, $[x_0, y_0]$ 는 $([x_0, x_1], [y_1, y_0])$ 에 의해 D -목격된다.

Proof. X 가 δ -쌍곡 공간일 때는 $D = C + \delta + 1$ 로 잡는다. 그러면

$$(x_0, x_1)_{y_1} = d(x_1, y_1) - (x_0, y_1)_{x_1} > 2C + \delta + 1,$$

$$\min\{(x_0, y_0)_{y_1}, (x_0, x_1)_{y_1}\} - \delta \leq (x_1, y_0)_{y_1} < C$$

로부터 $(x_0, y_0)_{y_1} < C + \delta < D$ 를 얻는다. 비슷한 이유로 $(x_0, y_0)_{x_1} < D$ 이다.

X 가 Teichmüller 공간일 때는 다음 상수들을 정의하겠다:

$$D_1 = \mathcal{B}(\epsilon, C + \mathcal{C}(\epsilon) + 3\mathcal{D}(\epsilon)),$$

$$\epsilon_1 = \epsilon e^{-2D_1}$$

$$D_2 = 2C + 2\mathcal{C}(\epsilon) + 6\mathcal{D}(\epsilon) + \mathcal{C}(\epsilon_1) + 2\mathcal{D}(\epsilon_1) + 1,$$

$$D = 2\mathcal{D}(\epsilon, 2D_2) + C + 2D_2.$$

먼저

$$(x_1, y_1)_{x_0} = d(x_0, x_1) - (x_0, y_1)_{x_1} \geq d(x_0, x_1) - C$$

임을 관찰하자. Lemma 2.14에 의해, $d(q, q') \leq \mathcal{D}(\epsilon)$ 및 $d(x_1, q) \leq C + \mathcal{C}(\epsilon) + 2\mathcal{D}(\epsilon)$ 를 만족시키는 점들 $q \in [x_0, x_1]$ 및 $q' \in [x_0, y_1]$ 가 존재한다. 이러면

$d(x_1, q') \leq C + \mathcal{C}(\epsilon) + 3\mathcal{D}(\epsilon)$ 이고, $[x_0, x_1]$ 와 $[x_0, q']$ 가 D_1 -바짝 붙어가며, $[x_0, q']$ 는 ϵ_1 -굵다.

이제 $[x_0, q']$ 의 부분선분 $[q_1, q_2]$ 를

$$d(q_1, q_2) = \mathcal{C}(\epsilon_1), \quad d(q_2, q') = C + \mathcal{C}(\epsilon) + 3\mathcal{D}(\epsilon) + \mathcal{D}(\epsilon_1) + 1$$

가 성립하게끔 잡자(만약 이것이 불가능하면 $d(x_0, x_1) \leq d(x_0, q') + d(q', x_1) \leq D_2$ 이므로 $\{x_0\} \subseteq [x_0, y_0]$ 와 $[x_0, x_1]$ 가 D -바짝 붙어간다). 그러면

$$\begin{aligned} d([q_1, q_2], [y_0, y_1]) &\geq d([q_1, q_2], y_1) - d(y_0, y_1) = d(q_2, y_1) - d(y_0, y_1) \\ &= d(q_2, q') + d(q', y_1) - d(y_0, y_1) \\ &\geq d(q_2, q') + d(x_1, y_1) - d(x_1, q') - d(y_0, y_1) > \mathcal{D}(\epsilon_1) \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이를 고려하여 삼각형 $\triangle x_0 y_0 y_1$ 에 Theorem 2.13를 적용하면, 거리 $\mathcal{D}(\epsilon_1)$ 이내에 있는 점 $a \in [q_1, q_2]$ 와 $b \in [x_0, y_0]$ 가 존재한다는 것을 알 수 있다. 이때 $d(b, x_1) \leq d(b, a) + d(a, q') + d(q', x_1) \leq D_2$ 가 성립한다. 여기서 At the moment, $d(x_0, b') = d(x_0, b)$ 인 점 $b' \in [x_0, y_0]$ 를 잡으면 $d(b', x_1) \leq d(b', b) + d(b, x_1) \leq 2D_2$ 가 성립한다. 따라서 $[x_0, b']$ 와 $[x_0, y_0]$ 가 D -바짝 붙어간다.

대칭적으로 생각하면, $d(b'', y_0) = d(y_1, y_0)$ (이거나 $b'' = y_0$)인 점 $b'' \in [x_0, y_0]$ 이 존재하여 $[b'', y_0]$ 와 $[y_1, y_0]$ 가 D -바짝 붙어간다. 이제 $[x_0, b']$ 가 $[b'', y_0]$ 보다 먼저 등장한다는 것만 증명하면 된다. Fact 2.4에 의해, $d(y_1, [x_0, x_1]) \geq (x_0, x_1)_{y_1} \geq d(x_1, y_1) - C$ 가 성립한다. $[x_0, x_1]$ 와 $[x_0, b']$ 사이 Hausdorff 거리가 D 이하이기, $d(y_1, [x_0, b']) \geq d(x_1, y_1) - C - D > D$ 임을 알 수 있다. $d(b'', y_1) < D$ 이므로 $b'' \notin [x_0, b']$ 이고 원하던 결론이 따라 나온다. \square

Lemma 3.6는 나중에 초기 방향 전환을 통해 (등거리사상) 단어의 이동 길이를 통제할 때 유용하게 쓰일 것이다. 그러나 그를 위해서는 먼저 중추 시점들을 정의해야 하는데, 이때는 중간 선분들의 길이를 통제할 수 없다. 그렇기에, 다음 보조정리를 대신 사용해야만 한다.

Lemma 3.7 (내적이 작으면 목격된다 II). 각 $C, \epsilon > 0$ 에 대해, 다음을 만족시키는 상수 $D > C$ 가 존재한다. 만약 X 의 네 점 x_0, x_1, y_0, y_1 에 대해

- (1) $[x_0, x_1], [y_0, y_1]$ 가 ϵ -굵고,
- (2) $(x_0, y_1)_{x_1}, (x_0, y_0)_{y_1} < C$

가 성립하면, $[x_0, y_0]$ 는 $([x_0, x_1], [y_1, y_0])$ 에 의해 D -목격된다.

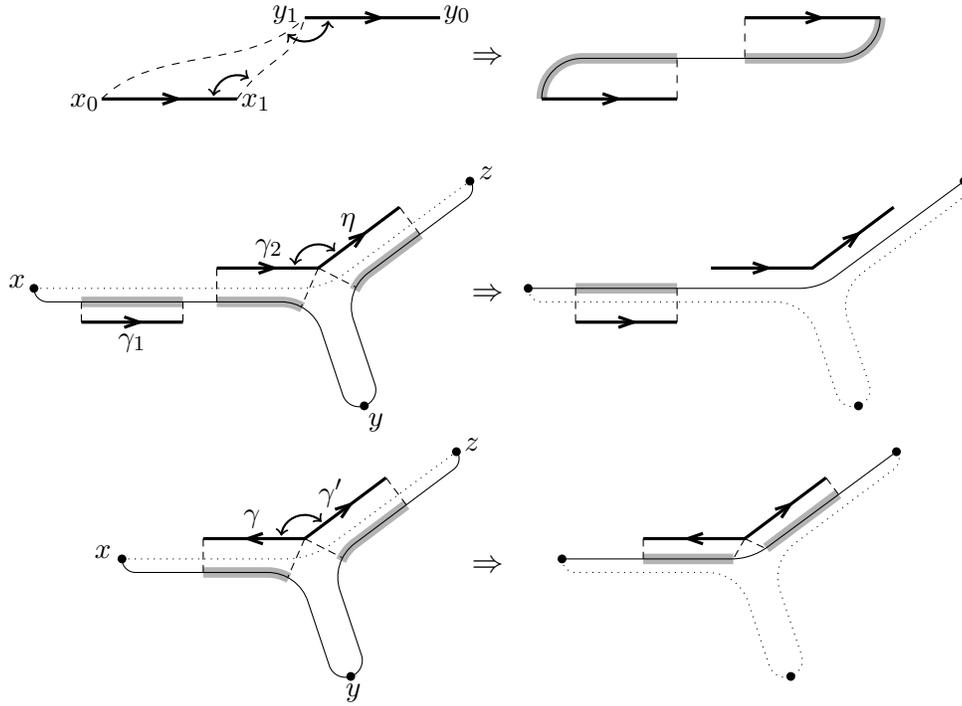


FIGURE 2. Lemma 3.7, 3.9, 3.10를 위한 모식도.

Proof. X 가 δ -쌍곡 공간일 때는 $D = 2C$ 로 잡는다. 먼저

$$\begin{aligned}
 d(x_0, y_0) &= d(x_0, y_1) + d(y_1, y_0) - 2(x_0, y_0)_{y_1} \\
 &= d(x_0, x_1) + d(x_1, y_1) - 2(x_0, y_1)_{x_1} + d(y_1, y_0) - 2(x_0, y_0)_{y_1} \\
 &> d(x_0, x_1) + d(x_1, y_1) + d(y_1, y_0) - 4C
 \end{aligned}$$

임을 관찰하자. 이는

$$\begin{aligned}
 2(x_1, y_0)_{y_1} &= d(x_1, y_1) + d(y_1, y_0) - d(x_1, y_0) \\
 &\leq d(x_1, y_1) + d(y_1, y_0) - [d(x_0, y_0) - d(x_0, x_1)] < 4C
 \end{aligned}$$

및

$$\begin{aligned}
 2(x_0, y_0)_{x_1} &= d(x_0, x_1) + d(x_1, y_0) - d(x_0, y_0) \\
 &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, y_1) + d(y_1, y_0) - d(x_0, y_0) < 4C
 \end{aligned}$$

를 암시한다.

X 가 Teichmüller 공간일 때는 다음 상수들을 정의하겠다:

$$\begin{aligned} D_1 &= \mathcal{B}(\epsilon, C + \mathcal{C}(\epsilon) + 3\mathcal{D}(\epsilon)), \\ \epsilon_1 &= \epsilon e^{-2D_1}, \\ D_2 &= 4C + 3\mathcal{C}(\epsilon) + 9\mathcal{D}(\epsilon) + \mathcal{C}(\epsilon_1) + 2\mathcal{D}(\epsilon_1) + 1, \\ D &= \mathcal{B}(\epsilon_1, D_2) + C + D_1. \end{aligned}$$

이전 보조정리에서와 같이, $(x_0, y_0)_{y_1} < C$ 및 $(x_0, y_1)_{x_1} < C$ 라는 조건으로부터 $d(p', y_1), d(q', x_1) \leq C + \mathcal{C}(\epsilon) + 3\mathcal{D}(\epsilon)$ 를 만족하는 점들 $p' \in [x_0, y_0]$ 및 $q' \in [x_0, y_1]$ 를 얻는다. 그러면 $[p', y_0]$ 와 $[y_1, y_0]$ 는 D_1 -바깥 붙어가며, $[x_0, q']$ 와 $[x_0, x_1]$ 도 D_1 -바깥 붙어간다. $[x_0, q']$ 이 ϵ_1 -굵다는 점을 유의하라.

이제 $d(q_1, q_2) = \mathcal{C}(\epsilon_1)$ 이고 $d(q_2, q') = 3C + 2\mathcal{C}(\epsilon) + 6\mathcal{D}(\epsilon) + \mathcal{D}(\epsilon_1) + 1$ 이도록 하는 $[x_0, q']$ 의 부분선분 $[q_1, q_2]$ 를 잡자(이것이 불가능한 경우 $[x_0, x_1]$ 는 길이 D_3 이하이고 $[x_0, x_1]$ 와 $\{x_0\}$ 는 D_3 -바깥 붙어간다). 만약 어떤 점 $a \in [q_1, q_2]$ 과 $b \in [y_1, y_0]$ 가 서로 거리 $\mathcal{D}(\epsilon_1)$ 이내에 있다면, Fact 2.4에 의해

$$(x_0, y_0)_{y_1} \geq d(a, y_1) - d(a, b) \geq d(q_2, q') - \mathcal{D}(\epsilon_1) > C$$

를 얻어 모순이다. 그러므로, 그 대신 서로 거리 $\mathcal{D}(\epsilon_1)$ 이내에 있는 점 $a \in [q_1, q_2]$ 및 $b \in [x_0, y_0]$ 를 얻는다. 이때

$$\begin{aligned} d(x_0, b) &\leq d(x_0, a) + d(a, b) \leq d(x_0, q_2) + d(a, b) \\ &\leq d(x_0, q') - [3C + 2\mathcal{C}(\epsilon) + 6\mathcal{D}(\epsilon) + \mathcal{D}(\epsilon_1) + 1] - \mathcal{D}(\epsilon_1) \\ &\leq d(x_0, x_1) - [2C + \mathcal{C}(\epsilon) + 3\mathcal{D}(\epsilon) + 1] \\ &\leq d(x_0, y_1) + C - [2C + \mathcal{C}(\epsilon) + 3\mathcal{D}(\epsilon) + 1] \leq d(x_0, p') - 1. \end{aligned}$$

가 성립한다. 따라서, $[x_0, b]$ 는 $[p', y_0]$ 보다 먼저 등장한다. 또한, $d(x_1, b) \leq d(x_1, q') + d(q', a) + d(a, b) \leq D_2$ 로부터 $[x_0, b]$ 와 $[x_0, x_1]$ 가 D -바깥 붙어간다는 것을 알 수 있다. \square

Lemma 3.7에서 만약 $[x, y]$ 가 ϵ -굵고 $(z, y)_x < C$ 이면 $[z, y]$ 가 $[x, y]$ 에 의해 D -목격된다는 것 또한 알 수 있다. 이제 정렬됨의 정의를 소개할 것이다.

Definition 3.8 (정렬과 표시). 선분들의 나열들 $(\gamma_i)_{i=1}^N, (\eta_i)_{i=1}^N$ 이 (C, D) -정렬되어 있다((C, D) -aligned)는 것은 다음 성질들이 성립한다는 뜻이다:

- (1) 각 $i = 1, \dots, N$ 에 대해 γ_i 와 η_i 는 어떤 점 p_i 에서 C -붙여져 있고,
- (2) 각 $i = 2, \dots, N$ 에 대해, $[p_{i-1}, p_i]$ 는 (γ_{i-1}, η_i) 에 의해 D -목격되고 있다.

(C, D) -정렬된 선분들의 나열들 $(\gamma_i)_{i=1}^N, (\eta_i)_{i=1}^N$ 이 주어졌을 때, 또다른 선분 $[x, y]$ 이 $(\gamma_i), (\eta_i)$ 에 의해 (C, D) -표시되어 있다((C, D) -marked with)는 것은, $(\eta_1, x)_* < C$ 및 $(\gamma_N, y)_* < C$ 가 성립한다는 뜻이다. 이때, $[p_1, y]$ 는 $(\gamma_i)_{i=1}^N$,

$(\eta_i)_{i=2}^N$ 에 의해 (C, D) -머리부터 표시되어 있다((C, D) -head-marked)고 얘기한다. 비슷한 측면에서, $[x, p_N]$ 는 $(\gamma_i)_{i=1}^{N-1}$, $(\eta_i)_{i=1}^N$ 에 의해 (C, D) -꼬리부터 표시되어 있다((C, D) -tail-marked)고 하고, $[p_1, p_N]$ 는 $(\gamma_i)_{i=1}^{N-1}$, $(\eta_i)_{i=2}^N$ 에 의해 완전히 (C, D) -표시되어 있다(fully (C, D) -marked)고 한다.

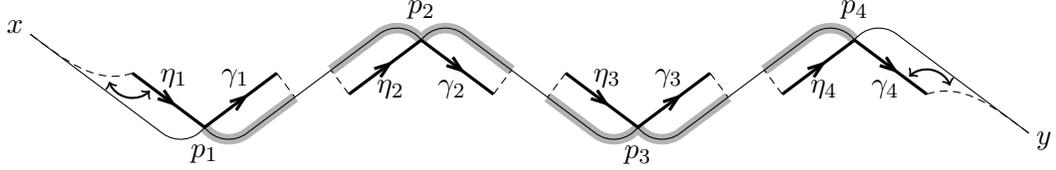


FIGURE 3. 정렬과 표시. 여기서 $(\gamma_i)_{i=1}^4$ 와 $(\eta_i)_{i=1}^4$ 는 D -정렬되어 있고 $[x, y]$ 는 $(\gamma_i)_{i=1}^4$, $(\eta_i)_{i=1}^4$ 에 의해 (C, D) -표시되어 있다. 또한, $[p_1, y]$ 는 $(\gamma_i)_{i=1}^4$ 와 $(\eta_i)_{i=2}^4$ 에 의해 (C, D) -머리부터 표시되어 있다고 말한다. 비슷한 측면에서, $[x, p_4]$ 는 $(\gamma_i)_{i=1}^3$, $(\eta_i)_{i=1}^4$ 에 의해 (C, D) -표시되어 있다고 한다.

이 정의의 목적은 점들이 정렬된 방식을 누적해 나가, 다음 보조정리들을 활용해 Gromov 내적을 추정할 수 있도록 하는 것이다.

Lemma 3.9 (작은 내적은 전염된다). 각 $D, \epsilon > 0$ 에 대해, 다음 성질을 만족시키는 상수 $E, L > D$ 가 존재한다. $X_{\geq \epsilon}$ 위의 점 $x, y, z \in X_{\geq \epsilon}$ 과, 길이 L 이상인 ϵ -굽은 선분 γ_1, γ_2, η 가 주어졌다고 하자. 또 $\bar{\gamma}_2$ 와 η 가 D -붙여졌다고 가정하자. 만약 $[x, y]$ 가 (γ_1, γ_2) 에 의해 D -목격되고 $[y, z]$ 가 η 에 의해 E -목격되고 있으면, $[x, z]$ 는 γ_1 에 의해 E -목격된다.

Proof. $\bar{\gamma}_2, \eta$ 가 $y' \in X$ 에서 붙여졌다고 하고 $\gamma_1 = [x_0, y_0]$ 로 두자.

만약 X 가 δ -쌍곡 공간일 때는 $E = D + 4\delta$ 및 $L = 4D + 6\delta + 1$ 로 잡는다. 먼저

$$(\eta, z)_* \geq L - (\bar{\eta}, z)_* \geq L - E \geq D + 2\delta + 1,$$

$$(\bar{\gamma}_2, y_0)_* \geq L - (\gamma_2, y_0)_* \geq L - D \geq D + 2\delta + 1.$$

임을 관찰하라. 이와 함께 Gromov 부등식

$$\min\{(\bar{\gamma}_2, y_0)_*, (y_0, \eta)_*\} - \delta \leq (\bar{\gamma}_2, \eta)_* \leq D$$

을 고려하면 $(y_0, \eta)_* \leq D + \delta$ 를 얻고,

$$\min\{(\eta, z)_*, (z, y_0)_{y'}\} - \delta \leq (\eta, y_0)_* \leq D + \delta$$

로부터 $(z, y_0)_{y'} \leq D + 2\delta$ 를 얻는다. 그러면 Fact 2.2는

$$\begin{aligned} (y, z)_{y_0} &= d(y_0, y') + (y, z)_{y'} - (y, y_0)_{y'} - (z, y_0)_{y'} \\ &\geq d(y_0, y') - 2D - 2\delta \geq L - 3D - 2\delta \geq D + 3\delta + 1 \end{aligned}$$

임을 암시한다. 그러므로, Lemma 3.3의 결과인

$$\min\{(x, z)_{y_0}, (z, y)_{y_0}\} - \delta \leq (x, y)_{y_0} \leq D + 2\delta$$

로부터 $(x, z)_{y_0} \leq D + 3\delta$ 임을 얻는다. 또한

$$(\bar{\gamma}_1, x)_* \geq L - (\gamma_1, x) \geq L - D \geq D + 4\delta + 1$$

이므로 $(\bar{\gamma}_1, z)_* \leq D + 4\delta$ 를 얻는다. 이는 다시금

$$(\gamma_1, z)_* \geq L - (\bar{\gamma}_1, z)_* \geq L - D - 4\delta \geq D + \delta + 1$$

를 암시한다. 가정에 의해 $(x, \gamma_1)_* \leq D$ 이므로, $(x, z)_{x_0} \leq D + \delta$ 를 얻는다.

이제 X 가 Teichmüller 공간인 경우를 생각하자. 이때는 다음 상수들을 잡는다:

$$\epsilon_1 = \epsilon e^{-2D},$$

$$E = \mathcal{B}(\epsilon_1, \mathcal{D}(\epsilon_1)) + D,$$

$$L = 4D + 2E + \mathcal{C}(\epsilon_1) + 2\mathcal{D}(\epsilon_1) + 2.$$

이제 $[p, p']$ 와 γ_1 가 D -바짝 붙어가고, $[q, q']$ 와 γ_2 가 D -바짝 붙어가고, $[p, p']$ 가 $[q, q']$ 보다 먼저 등장하도록 점 $p, p', q, q' \in [x, y]$ 를 잡자. 여기서 $d(y', q') < E$ 이고 $[p, p']$, $[q, q']$ 모두 ϵ_1 -굵다는 점을 유의하라. $d(q', q) \geq L - D$ 이므로, $d(q', q_1) = 3D + 2E + \mathcal{D}(\epsilon_1) + 1$ 및 $d(q_1, q_2) = \mathcal{C}(\epsilon_1)$ 가 성립하게 하는 $[q', q]$ 의 부분선분 $[q_1, q_2]$ 를 잡을 수 있다.

이제 서로 거리 $\mathcal{D}(\epsilon_1)$ 이내에 있는 점들 $a \in [q_1, q_2]$ 및 $b \in [y, z]$ 가 존재한다고 가정해 보자. 그러면

$$\begin{aligned} d(y, y') + E &\leq d(y, y') + [3D + E + \mathcal{D}(\epsilon_1) + 1] - D - \mathcal{D}(\epsilon_1) \\ &\leq [d(y, y') - d(y', q')] + d(q', q_1) - \mathcal{D}(\epsilon_1) \\ &\leq d(y, q') + d(q', a) - \mathcal{D}(\epsilon_1) \\ &\leq d(y, a) - d(a, b) \leq d(y, b) \leq d(y, a) + d(a, b) \\ &\leq d(y, q') + d(q', a) + \mathcal{D}(\epsilon_1) \\ &\leq d(y, y') + d(y', q') + d(q', q_2) + \mathcal{D}(\epsilon_1) \\ &\leq d(y, y') + [3D + E + \mathcal{D}(\epsilon_1) + 1] + D + \mathcal{D}(\epsilon_1) \leq d(y, y') + L - E \end{aligned}$$

이 성립할 것이다. 이는 b 가 η 에 E -바짝 붙어가는 $[y, z]$ 의 부분선분에 속한다는 뜻이고, 적당한 $b' \in \eta$ 에 대해 $d(b, b') \leq E$ 가 성립한다. 비슷한 의미에서, $d(a, a') \leq D$ 인 점 $a' \in \gamma_2$ 가 존재한다. 그러면 Fact 2.4로부터

$$\begin{aligned} (\bar{\gamma}_2, \eta)_* &\geq d(y', a') - d(a', b') \\ &\geq [d(q', q_1) - d(y', q') - d(q_1, a) - d(a, a')] - [d(a', a) + d(a, b) + d(b, b')] \\ &\geq d(q', q_1) - 2D - 2E - \mathcal{C}(\epsilon_1) - \mathcal{D}(\epsilon_1) > D \end{aligned}$$

라는 모순을 얻는다. 그러므로, 대신 서로 거리 $\mathcal{D}(\epsilon_1)$ 이내에 있는 점들 $a \in [q_1, q_2]$ 및 $b \in [x, z]$ 가 존재한다. 그러면 $[x, b]$ 와 $[x, a]$ 는 $\mathcal{B}(\epsilon_1, \mathcal{D}(\epsilon_1))$ -바짝 붙어간다. γ_1 에 D -바짝 붙어가는 $[p, p']$ 를 $[x, a]$ 가 부분선분으로 가지고 있으므로, $[x_0, b]$ 의 적당한 부분선분과 γ_1 는 E -바짝 붙어간다. \square

Lemma 3.10 (중간 부분의 목적). 각 $E, \epsilon > 0$ 에 대해, 다음을 만족하는 상수들 $F, L > E$ 이 존재한다. $X_{\geq \epsilon}$ 위의 점 x, y, y', z 와, y' 에서 E -붙여진 길이 L 이상의 ϵ -굵은 선분들 γ, γ' 가 주어졌다고 하자. 만약 $[y, x]$ 가 γ 에 의해 E -목적되고 $[y, z]$ 가 γ' 에 의해 E -목적되고 있으면, $[x, z]$ 는 $\bar{\gamma}$ 및 γ' 에 의해 F -목적된다. 특히, $|(x, z)_y - d(y, y')| < F$ 가 성립한다.

Proof. X 가 δ -쌍곡 공간일 때는 $F = 2E + 3\delta$ 및 $L = 2E + 6\delta + 1$ 로 잡고, $\gamma' = [y', z']$ 라고 두자. 먼저

$$\begin{aligned} (\gamma', z)_* &\geq L - (\bar{\gamma}', z)_* \geq L - E \geq E + 3\delta + 1, \\ (\gamma, x)_* &\geq L - (\bar{\gamma}, x)_* \geq L - E \geq E + 2\delta + 1. \end{aligned}$$

임을 관찰하자. 여기서 두번째 부등식은 Gromov 부등식

$$\min\{(\gamma, x)_*, (\gamma', x)_*\} - \delta \leq (\gamma', \gamma)_* \leq E,$$

에 결합되어 $(\gamma', x)_* \leq E + \delta$ 를 내놓는다. 그러면 첫번째 부등식은

$$\min\{(x, z)_{y'}, (z, \gamma')_*\} - \delta \leq (x, \gamma')_* \leq E + \delta,$$

에 결합되어 $(x, z)_{y'} \leq E + 2\delta$ 를 내놓는다. 이제 Fact 2.2는

$$(x, z)_{z'} = (x, z)_{y'} + d(z', y') - (x, z')_{y'} - (z, z')_{y'} = (x, z)_{y'} + (\gamma', x)_* - (\gamma', x)_* \leq 2E + 3\delta$$

를 암시한다. 결론적으로, $[x, z]$ 가 γ' 에 의해 F -목적된다는 것을 알 수 있다. 비슷한 이유로 $[z, x]$ 가 $\bar{\gamma}$ 에 의해 F -목적된다는 것을 알 수 있다.

X 가 Teichmüller 공간일 때는 다음 상수들을 잡겠다:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon e^{-2E}, \\ L &= 7E + \mathcal{C}(\epsilon_1) + 2\mathcal{D}(\epsilon_1) + 2, \\ F_1 &= \mathcal{B}(\epsilon_1, 5E + \mathcal{C}(\epsilon_1) + 2\mathcal{D}(\epsilon_1) + 1), \\ F &= F_1 + 2E. \end{aligned}$$

이제 $[q, q']$ 와 $\bar{\gamma}$ 가 E -바짝 붙어가게끔 $[x, y]$ 위의 점 q, q' 를 잡자. 이때 $[q, q']$ 이 ϵ_1 -굵다는 것을 유의하라. $d(q', q) \geq L - E$ 이므로, $d(q', q_1) = 5E + \mathcal{D}(\epsilon_1) + 1$ 및 $d(q_1, q_2) = \mathcal{C}(\epsilon_1)$ 이 성립하게 하는 $[q', q]$ 의 부분선분 $[q_1, q_2]$ 을 잡을 수 있다.

여기서 서로 거리 $\mathcal{D}(\epsilon_1)$ 이내에 있는 점들 $a \in [q_1, q_2]$ 및 $b \in [y, z]$ 가 존재한다고 가정해 보자. 그러면

$$\begin{aligned}
 d(y, y') + E &\leq d(y, y') + [5E + \mathcal{D}(\epsilon_1) + 1] - E - \mathcal{D}(\epsilon_1) \\
 &\leq [d(y, y') - d(y', q')] + d(q', q_1) - \mathcal{D}(\epsilon_1) \\
 &\leq d(y, q') + d(q', a) - \mathcal{D}(\epsilon_1) \\
 &\leq d(y, a) - d(a, b) \leq d(y, b) \leq d(y, a) + d(a, b) \\
 &\leq d(y, q') + d(q', q_2) + \mathcal{D}(\epsilon_1) \\
 &\leq d(y, y') + d(y', q') + d(q', q_2) + \mathcal{D}(\epsilon_1) \\
 &\leq d(y, y') + [5E + \mathcal{C}(\epsilon_1) + \mathcal{D}(\epsilon_1) + 1] + E + \mathcal{D}(\epsilon_1) \leq d(y, y') + L - E
 \end{aligned}$$

이 성립할 것이다. 이는 b 가 η 에 E -바짝 붙어가는 $[y, z]$ 의 부분선분에 속한다는 뜻이고, 적당한 $b' \in \eta$ 에 대해 $d(b, b') \leq E$ 가 성립할 것이다. 비슷한 의미에서, $d(a, a') \leq E$ 인 점 $a' \in \gamma_2$ 가 존재한다. 그러면 Fact 2.4로부터

$$\begin{aligned}
 (\gamma, \gamma')_* &\geq d(y', a') - d(a', b') \\
 &\geq [d(q', q_1) - d(q', y') - d(q_1, a) - d(a, a')] - [d(a', a) + d(a, b) + d(b, b')] \\
 &\geq d(q', q_1) - 4E - \mathcal{C}(\epsilon_1) - \mathcal{D}(\epsilon_1) > E
 \end{aligned}$$

라는 모순을 얻는다. 그러므로, 대신 서로 거리 $\mathcal{D}(\epsilon_1)$ 이내에 있는 점들 $a \in [q_1, q_2]$ 및 $b \in [x, z]$ 가 존재한다. 그러면

$$d(b, q') \leq d(b, a) + d(a, q') \leq 5E + \mathcal{C}(\epsilon_1) + 2\mathcal{D}(\epsilon_1) + 1$$

이므로 $[x, b]$ 와 $[x, q']$ 는 F_1 -바짝 붙어간다. $[q, q'] \subseteq [x, q']$ 와 $\bar{\gamma}$ 가 E -바짝 붙어가므로, $[x, b]$ 의 적당한 부분선분과 $\bar{\gamma}$ 가 F -바짝 붙어간다는 결론이 나온다. 비슷한 이유에서, $[x, z]$ 는 γ 를 F -바짝 붙어간다.

두 경우 모두에서 $(x, y)_{y'} < E$, $(y, z)_{y'} < E$ 및 $(z, x)_{y'} < F$ 가 성립한다. 그러면 Fact 2.4는 다음 결론을 의미한다:

$$\begin{aligned}
 d(y, y') - F &\leq d(y, y') - 2E \\
 &\leq (x, z)_y = (x, z)_{y'} + d(y, y') - (x, y)_{y'} - (z, y)_{y'} \\
 &\leq d(y, y') + F. \quad \square
 \end{aligned}$$

마침내, Lemma 3.4와 Lemma 3.10를 결합하면 다음 결론을 얻는다.

Corollary 3.11. 상수 $C, M, \epsilon > 0$ 에 대해,

- $D = D(\epsilon, C)$ 를 Lemma 3.7에서와 같이,
- $E = E(\epsilon, D)$, $L_1 = L(\epsilon, D)$ 를 Lemma 3.9에서와 같이,
- $F = F(\epsilon, E)$, $L_2 = L(\epsilon, E)$ 를 Lemma 3.10에서와 같이

정의하자. 이와 함께 $X_{\geq \epsilon}$ 위의 점들 $(p_i)_{i=0}^{N+1}$ 과 선분들 $(\gamma_i)_{i=1}^N, (\eta_i)_{i=1}^N$ 을 생각하자. 만약:

- (1) γ_i, η_i 의 길이가 $\max(L_1, L_2, M + 6D + 2F + 8\delta + 1)$ 이상이고,
- (2) $(\gamma_i)_{i=1}^N, (\eta_i)_{i=1}^N$ 가 $(p_i)_{i=1}^N$ 에서 붙여진 (C, D) -정렬된 선분들이고,
- (3) $[p_0, p_{N+1}]$ 가 $(\gamma_i), (\eta_i)$ 에 의해 (C, D) -표시되어 있다

고 가정하면, 다음이 성립한다:

- (1) $0 \leq i \leq N$ 에 대해 $d(p_i, p_{i+1}) \geq M + 2F$ 이고,
- (2) $0 \leq i < j < k \leq N + 1$ 에 대해 $[p_i, p_k]$ 가 γ_j, η_j 에 의해 F -목격되고,
- (3) $0 \leq i < j < k \leq N + 1$ 에 대해 $(p_i, p_k)_{p_j} < F$ for $0 \leq i < j < k \leq N + 1$ 이며,
- (4) $0 \leq i \leq j \leq N$ 에 대해 $d(p_i, p_{j+1}) \geq d(p_i, p_j) + M$ 이다.

Lemma 3.12 (목격자 베껴오기). 각 $F, \epsilon > 0$ 에 대해, 다음을 만족하는 상수들 $G, L > F$ 이 존재한다. $X_{\geq \epsilon}$ 위의 점들 x, y, z, p_1, p_2 에 대해

- (1) $[p_1, p_2]$ 이 길이 L 이상인 ϵ -굵은 선분이고,
- (2) $[x, y]$ 가 $[p_1, p_2]$ 에 의해 F -목격되고,
- (3) $(x, z)_y \geq d(p_1, y) - F$

이면, $[z, y]$ 는 $[p_1, p_2]$ 에 의해 G -목격된다.

Proof. X 가 δ -쌍곡 공간일 때는, $G = 3F + 2\delta$ 및 $L = 4F + 3\delta + 1$ 로 잡는다. 먼저

$$(x, z)_{p_2} \geq (x, z)_y - d(y, p_2) \geq d(y, p_1) - d(y, p_2) - F \geq d(p_1, p_2) - 3F$$

임을 주목하라. 또한

$$(x, p_1)_{p_2} = d(p_1, p_2) - (x, p_2)_{p_1} \geq d(p_1, p_2) - F$$

이 성립한다. 이들을 결합하면

$$(z, p_1)_{p_2} \geq d(p_1, p_2) - 3F - \delta \geq F + \delta + 1,$$

$$(z, p_2)_{p_1} = d(p_1, p_2) - (z, p_1)_{p_2} \leq 3F + \delta$$

를 얻는다. 여기서 $(p_2, y)_{p_1} \geq d(p_1, p_2) - F \geq 3F + 2\delta + 1$ 이므로, we $(z, y)_{p_1} \leq 3F + 2\delta$ 임을 알 수 있다. 또한, $(p_1, y)_{p_2} \leq F$ 및 $(z, p_1)_{p_2} \geq F + \delta + 1$ 로부터 $(z, y)_{p_2} \leq F + \delta$ 를 얻는다.

X 가 Teichmüller 공간일 때는 다음 상수들을 잡겠다:

$$\epsilon_1 = \epsilon e^{-2F},$$

$$L = 3F + \mathcal{D}(\epsilon_1) + \mathcal{C}(\epsilon_1) + 1,$$

$$G_1 = \mathcal{B}(\epsilon_1, \mathcal{D}(\epsilon_1)) + 2L,$$

$$G = G_1 + F.$$

$[p_1, p_2]$ 에 의해 F -목격되는 $[x, y]$ 의 부분선분 $[x', y']$ 를 생각하자. 여기서 $(x, z)_y \geq d(x', y) - 2F$ 및 $d(x', y') \geq L - F \geq 2F + \mathcal{D}(\epsilon_1) + \mathcal{C}(\epsilon_1) + 1$ 가 성립함을 유의하라. 이로부터 $d(x', x'') = 2F + \mathcal{D}(\epsilon_1) + 1$ 및 $d(x'', y'') = \mathcal{C}(\epsilon_1)$ 가 성립하게 하는 $[x', y']$ 의 부분선분 $[x'', y'']$ 가 존재함을 알 수 있다. 만약 서로 거리 $\mathcal{D}(\epsilon_1)$ 이내에 있는 점들 $a \in [x'', y'']$ 및 $b \in [x, z]$ 가 존재한다면, Fact 2.2에 의해

$$(y, z)_x \geq d(a, x) - d(a, b) \geq d(x, x') + d(x', x'') - \mathcal{D}(\epsilon_1) \geq d(x, x') + 2F + 1$$

가 성립할 것이다. 이는

$$d(x, y) = (y, z)_x + (x, z)_y > d(x, x') + d(x', y) = d(x, y),$$

라는 모순을 암시한다. 그러므로, 대신 서로 거리 $\mathcal{D}(\epsilon_1)$ 이내에 있는 점들 $a \in [x'', y'']$ 및 $b \in [y, z]$ 가 존재한다. 그러면 $[a, y]$ 와 $[b, y]$ 는 $\mathcal{B}(\epsilon_1, \mathcal{D}(\epsilon_1))$ -바짝 붙어간다. 여기서

$$d(x', a) \leq d(x', y'') \leq 2F + \mathcal{D}(\epsilon_1) + \mathcal{C}(\epsilon_1) + 1$$

가 성립하므로, $[x', y]$ 와 $[b, y]$ 는 G_1 -바짝 붙어간다. 더하여 $[x', y'] \subseteq [x', y]$ 및 $[p_1, p_2]$ 가 F -바짝 붙어가므로 원하던 결론을 얻을 수 있다. \square

4. 중추 시점

4.1. **Schottky 집합과 중추** 이 절 내내 독립적인 X 의 쌍곡적 등거리사상 두 개 a, b 를 고정하겠다. 먼저 [BMSS20]에서 영향을 받은 [Gou21]에서의 Schottky 집합의 정의를 상기하자.

Definition 4.1 (cf. [Gou21, Definition 3.11]). 상수 $K, K', \epsilon > 0$ 를 고정했을 때, X 의 등거리사상으로 이루어진 유한 집합 S 이 (K, K') -Schottky하다는 것은 다음이 성립한다는 것을 의미한다:

- (1) 각 $x, y \in X$ 마다 $|\{s \in S : (x, s^i y)_o \geq K \text{ for some } i > 0\}| \leq 2$ 이고,
- (2) 각 $x, y \in X$ 마다 $|\{s \in S : (x, s^i y)_o \geq K \text{ for some } i < 0\}| \leq 2$ 이며,
- (3) 각 $s \in S$ 및 $i \neq 0$ 마다 $d(o, s^i o) \geq K'$ 이다.

X 가 Teichmüller 공간일 경우, S 가 (K, K', ϵ) -Schottky라는 다음 조건이 추가로 성립한다는 뜻이다:

- (4) 각 $s \in S$ 및 $i \in \mathbb{Z}$ 에 대해, 측지선 $[o, s^i o]$ 이 ϵ -굽다.

Schottky 집합의 부분집합은 여전히 Schottky 집합임을 주목하라. 이제 이 항의 핵심 결과를 소개하겠다.

Proposition 4.2 (cf. [Gou21, Proposition 3.12]). 상수 $K, \epsilon > 0$ 가 존재하여, 임의의 상수 $K' > 0$ 에 대해, $\{w_1 \cdots w_n : w_i \in \{a, b\}\}$ 안에 크기 310 이상인

(K, K') -Schottky 집합이 존재하도록 정수 n 을 잡을 수 있다. X 가 Teichmüller 공간일 때는 이것이 (K, K', ϵ) -Schottky 집합이 되도록 잡을 수 있다.

δ -쌍곡 공간의 경우 Proposition 4.2의 증명은 [Gou21]에 주어져 있다. 이제 X 가 Teichmüller 공간인 경우를 생각하자. $S_0 = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ 로 두겠다.

Lemma 4.3 (cf. [BCK21, Lemma 4.7]). 각 $\phi \in S_0$ 에 대해 $\{\phi^i o\}_{i=0}^n$ 와 $[o, \phi^n o]$ 사이 Hausdorff 거리가 M_1 이하인 상수 $M_1 > 0$ 이 존재한다. 그 결과로, 모든 $n \in \mathbb{Z}$ 에 대해 $[o, \phi^n o]$ 이 ϵ_0 -굵게 되는 상수 $\epsilon_0 > 0$ 가 존재한다.

Lemma 4.4. 다음을 만족시키는 상수 M_2 가 존재한다:

- (1) 각 $m \geq 0$ 및 $n \leq 0$ 마다 $(a^m o, a^n o)_o, (b^m o, b^n o)_o \leq M_2$ 이며,
- (2) 각 $n, m \in \mathbb{Z}$ 마다 $(a^n o, b^m o)_o \leq M_2$ 이다.

Proof. $M_2 \geq 3 \max\{d(o, (\text{axis of } \phi)) : \phi \in S_0\}$ 로 잡으면 첫번째 항목은 만족시킬 수 있다. 이제 두번째 항목에 대한 주장이 틀렸다고 가정해 보자. 그러면 $(a^{n_i} o, b^{m_i} o)_o > i$ 를 만족하는 $n_i, m_i \in \mathbb{Z}$ 이 존재해야 한다. 그러면 적당한 부분열을 취함으로써, Lemma 2.14는 $d(p_i, q_i) < \mathcal{D}(\epsilon)$ 이고 $d(o, p_i) \geq i$ 이도록 하는 점들 $p_i \in [o, a^{n_i} o]$ 및 $q_i \in [o, b^{m_i} o]$ 이 존재함을 보장해 준다. 역시 적당한 부분열을 취함으로써, Lemma 4.3는 $d(a^{k_i} o, b^{l_i} o) \leq \mathcal{D}(\epsilon) + 2M_1$ 이고 $d(o, a^{k_i} o) \geq i$ 이도록 하는 수열 k_i, l_i 이 존재함을 보장해 준다. [KM96]의 Lemma 1.4.2에 의해, 이는 $a^{k_i} o$ 및 $b^{l_i} o$ 가 같은 가장자리 점으로 수렴함을 암시하는데, a 와 b 는 독립적이라고 가정했기에 모순이다. \square

Proof of Proposition 4.2. $M' = \max(M_1, M_2)$ 을 고정하고 다음 상수들을 잡겠다:

- $D_0 = D(C = M', \epsilon_0)$ 를 Lemma 3.7에서와 같이,
- $E_0 = E(D = D_0, \epsilon_0)$, $L_0 = L(D = D_0, \epsilon_0)$ 를 Lemma 3.9에서와 같이,
- $F_0 = F(E = E_0, \epsilon_0)$, $L_1 = L(E = E_0, \epsilon_0)$ 를 Lemma 3.10에서와 같이,
- $G_0 = G(F = F_0, \epsilon_0)$, $L_2 = L(F = F_0, \epsilon_0)$ 를 Lemma 3.12에서와 같이,
- $G_1 = G(F = G_0, \epsilon_0)$, $L_3 = L(F = G_0, \epsilon_0)$ 를 Lemma 3.12에서와 같이,
- $F_1 = 2F_0 + G_1 + 2M' + 1$ 로,
- $F_2 = F(E = G_0, \epsilon_0)$ 를 $L_4 = L(E = G_0, \epsilon_0)$ 를 Lemma 3.10에서와 같이,
- $L_5 = \max(L_0, L_1, L_2, L_3, L_4, 6D_0 + 2F_0 + F_1 + F_2 + 8\delta + 2)$ 로.

쌍곡적 등거리사상들 a, b 의 이동 길이가 양수이므로, 모든 $\phi \in S_0$ 및 $n \geq N$ 에 대해 $d(o, \phi^n o) > L_5$ 이도록 하는 N 이 존재한다. $(o, \phi^N o)_{\phi^N o} = 0$ 및 $(o, \phi^{2N} o)_{\phi^{2N} o} \leq M'$ 가 성립함을 주목하라. 따라서, Lemma 3.7는 $[o, \phi^{2N} o]$ 가 $([o, \phi^N o], [\phi^N o, \phi^{2N} o])$ 에 의해 D_0 -목격된다는 것을 암시한다.

$\phi_i^{-1} \neq \phi_{i+1}$ 이게 잡은 나열 $(\phi_i) \in S_0^{\mathbb{Z}}$ 에 대해,

$$w_i = \phi_1^{2N} \cdots \phi_i^{2N}, \quad v_i = w_{i-1} \phi_i^N$$

와 같이 정의하겠다.

여기서 $[o, w_m o]$ 가 $([w_i o, v_{i+1} o])_{i=0}^{m-1}$ and $([v_i o, w_i o])_{i=1}^m$ 에 의해 완전히 (C_0, D_0) -표시되어 있음을 주목하라. 그러면 Corollary 3.11에서와 같이, Lemma 3.9 및 Lemma 3.10는 $[o, w_m o]$ 가 $[o, v_1 o], [v_1 o, w_1 o], \dots, [v_{10} o, w_{10} o]$ 에 의해 F_0 -목격된다는 것을 암시한다. 그 결과로, $\epsilon_1 = \epsilon_0 e^{-8F_0}$ 에 대해 $[o, w_m o]$ 는 ϵ_1 -굵다. 또한,

$$\begin{aligned} (4.1) \quad d(o, w_{i+1} o) &= d(o, w_i o) + d(w_i o, w_{i+1} o) - 2(o, w_{i+1} o)_{w_i o} \\ &\geq d(o, w_i o) + \left[\begin{array}{c} d(w_i o, v_{i+1} o) + d(v_{i+1} o, w_{i+1} o) \\ - 2(w_i o, w_{i+1} o)_{v_i o} \end{array} \right] - 2F_0 \\ &\geq d(o, w_i o) + 2d(o, \phi_{i+1}^N o) - 2M' - 2F_0 \\ &\geq d(o, w_i o) + d(o, \phi_{i+1}^N o) + F_1 \geq d(o, v_{i+1} o) + F_1 \end{aligned}$$

가 각 $i \geq 0$ 에 대해 성립한다. 특히, 마지막 두번째 부등식은 $d(o, w_i o) \geq F_1 i$ 를 암시한다.

이제

$$\begin{aligned} S' &= \{g_1, \dots, g_{2^{10}}\} = \{\phi_1^{2N} \cdots \phi_{10}^{2N} : \phi_i \in \{a, b\}\}, \\ V(g_i^\pm) &= \{x \in X : (x, g_i^{\pm 2} o)_o \geq d(o, g_i^{\pm 1} o) - F_1\}, \\ V'(g_i^\pm) &= \{x \in X : (x, g_i^{\pm 2} o)_o \geq d(o, g_i^{\pm 1} o)\} \end{aligned}$$

를 정의하자. 첫번째로 살펴볼 주장은 $V(g_1^+), \dots, V(g_{2^{10}}^+), V(g_1^-), \dots, V(g_{2^{10}}^-)$ 가 모두 겹치지 않는다는 것이다. 이를 증명하기 위해, $h_1 = \phi_1^{2N} \cdots \phi_{10}^{2N}$ 과 $h_2 = \psi_1^{2N} \cdots \psi_{10}^{2N}$ 가 $\{g_1, \dots, g_{2^{10}}, g_1^{-1}, \dots, g_{2^{10}}^{-1}\}$ 안의 서로 다른 원소라고 하자. 다시 말해, $i < t$ 에 대해 $\phi_i = \psi_i$ 이나 $\phi_{t+1} \neq \psi_{t+1}$ 인 $t \in \{0, \dots, 9\}$ 가 존재한다는 것이다. 만약 어떤 x 가 $V(h_1) \cap V(h_2)$ 에 속한다면, Inequality 4.1에 의해

$$(x, h_1^2 o)_o \geq d(o, w_{10} o) - F_1 \geq d(o, w_{t+1} o) - F_1 \geq d(o, v_{t+1} o)$$

이 성립하고 비슷한 이유로 $(x, h_2^2 o)_o \geq d(o, w_t \psi_{t+1}^N o)$ 이다. $[o, h_1^2 o]$ ($[o, h_2^2 o]$)가 $[w_t o, v_{t+1} o]$ ($[w_t o, w_t \psi_{t+1}^N o]$)에 의해 F_0 -목격되고 있으므로, $[o, x]$ 가 $[w_t o, v_{t+1} o]$ 및 $[w_t o, w_t \psi_{t+1}^N o]$ 에 의해 G_0 -목격되고 있다. 그러면 Lemma 3.10에 의해, $[x, x]$ 는 $[w_t o, v_{t+1} o]$ 에 의해 F_2 -목격된다는 결론을 얻게 되는데, $[w_t o, v_{t+1} o]$ 의 길이가 F_2 보다 큰 L_5 이상이므로 이는 불가능하다.

다음으로 살펴볼 주장은 $x \notin V(g_i^-)$ 이면 $g_i^2 x \in V'(g_i)$ 이라는 것이다. 실제로, Corollary 3.11는 $(o, g_i^2 o)_{g_i o} \leq F_0 \leq F_1/2$ 가 성립함을 알려 주는데, 이는

$$\begin{aligned} (g_i^2 x, g_i^2 o)_o &= (x, o)_{g_i^{-2} o} = d(o, g_i^{-2} o) - (x, g_i^{-2} o)_o \\ &\geq d(o, g_i^2 o) - d(o, g_i o) + F_1 \geq d(o, g_i o) \end{aligned}$$

를 암시한다.

이를 반복해 적용하면, $k > 0$ 일 때 $g_i^{2k} x \in V'(g_i)$ 임을 알 수 있다. 비슷한 이유로, $x \notin V(g_i)$ 이면 각 $k > 0$ 에 대해 $g_i^{-2k} x \in V'(g_i^-)$ 가 성립한다.

이제 $x, y \in X$ 및 $k > 0$ 가 주어졌다고 하자. $\{V(g_i^+), V(g_i^-)\}$ 가 모두 서로 겹치지 않으므로, $y \in V(g_i^-)$ 는 기껏해야 한 $g_i \in S'$ 에 대해 성립하고 $x \in V(g_j^+)$ 또한 기껏해야 한 $g_j \in S'$ 에 대해 성립한다. 만약 $s = \phi_1^{2N} \cdots \phi_{10}^{2N} \in S'$ 가 그 둘 중 어느 것보다도 같지 않다면,

$$(x, s^2 o)_o < d(o, so) - F_1, \quad (s^{2k} y, s^2 o)_o \geq d(o, so)$$

가 성립한다. $[o, s^2 o]$ 가 $[s\phi_{10}^{-N} o, so]$ 에 의해 F_0 -목격되므로, 이는 $[o, s^{2k} y]$ 가 $[s\phi_{10}^{-N} o, so]$ 에 의해 G_0 -목격된다는 것을 암시한다. 이제 만약 $(x, s^{2k} y)_o > d(o, so)$ 라고 가정하면, $[o, x]$ 역시 $[s\phi_{10}^{-N} o, so]$ 에 의해 G_1 -목격된다. 그러면 Fact 2.4는

$$(x, s^2 o)_o \geq d(o, so) - (G_1 + F_0) \geq d(o, so) - F_1$$

라는 모순을 암시한다. 그러므로 모든 $k > 0$ 에 대해 $(x, s^{2k} y)_o \leq d(o, so)$ 가 성립한다.

비슷하게, 만약 s 가 $y \in V(g_i^+)$ 인 g_i 와 같지 않고 $x \in V(g_j^-)$ 인 g_j 와도 같지 않으면, 모든 $k > 0$ 에 대해 $(x, s^{-2k} y)_o \leq d(o, s^{-1} o)$ 이다. 그러므로, $\epsilon = \epsilon_1$, $K = \max_{g_k \in S'} d(o, g_k o)$ 및 아무 $i > K'/F_1$ 에 대해 $S = \{g_k^i : g_k \in S'\}$ 로 잡을 수 있다. \square

이 증명에서, 사실 조금 더 강한 결론을 얻을 수 있다. 각 $x \in X$ 에 대해, $|\{s \in S : (x, s^i o)_o \geq K \text{를 만족시키는 } i > 0 \text{이 존재함}\}| \leq 1$ 및 $|\{s \in S : (x, s^i o)_o \geq K \text{를 만족시키는 } i > 0 \text{이 존재함}\}| \leq 1$ 이 성립한다. 이는 o 가 그 어느 $V(g_i^\pm)$ 에도 속하지 않기 때문이다.

$C_0 = K$ and ϵ 를 Proposition 4.2의 결론에서 얻은 뒤 다음 상수들을 잡자:

- Lemma 3.6에서와 같이 $D_1 = D(C = C_0, \epsilon)$ 를;
- Lemma 3.7에서와 같이 $D_2 = D(C = C_0, \epsilon)$ 를;
- $D_0 = \max(D_1, D_2)$;
- Lemma 3.9에서와 같이 $E_0 = E(D = D_0, \epsilon)$, $L_1 = L(D = D_0, \epsilon)$ 를;
- Lemma 3.10에서와 같이 $F_0 = F(E = E_0, \epsilon)$, $L_2 = L(E = E_0, \epsilon)$ 를;
- Lemma 3.7에서와 같이 $D_3 = D(C = F_0, \epsilon)$ 를;

- Lemma 3.12에서와 같이 $G_0 = G(F = 2F_0, \epsilon)$, $L_3 = L(F = 2F_0, \epsilon)$ 를;
- Lemma 3.10에서와 같이 $F_1 = F(E = G_0, \epsilon)$, $L_2 = L(E = G_0, \epsilon)$ 를;
- $F_2 = \mathcal{B}(\epsilon, 2F_0) + 2F_0 + 12\delta$;
- $L_0 = \max(L_1, L_2, L_3, 16D_0 + 8F_0 + 2G_0 + 16\delta + 2, 4D_3)$.

$\langle\langle \text{supp } \mu \rangle\rangle$ 안에 독립적인 쌍곡적 등거리사상 두 개 a, b 가 존재함을 기억하라. 이를 적당히 제공하여, $a, b \in \text{supp } \mu^n$ 가 성립하는 공통된 n 이 존재한다고 가정할 수 있다. Proposition 4.2에 따르면, 크기 310 이상인 (C_0, L_0, ϵ) -Schottky 집합 S_0 가 $\text{supp } \mu^N$ 안에 존재하게끔 하는 N 이 존재한다. 이 a, b, N, S_0 들을 앞으로 계속 고정하겠다. 각 $g \in G$, $s \in S_0$ 및 $i \in \{\pm 1, \pm 2\}$ 에 대해, $[go, gs^i o]$ 형태의 선분을 *Schottky 선분*이라고 부르고, 이들의 길이 중 최댓값을 \mathcal{M} 으로 나타내겠다.

4.2. **중추 시점** 먼저 Schottky 집합의 S_0 크기 305 이상인 부분집합 S 를 고정하고 시작하겠다. 다음 정의는 [Gou21]에 소개된 것을 변형한 것이다. 주요한 차이는 뒷걸음질(backtracking)에서 발생하지만, 대부분의 증명들은 [Gou21]의 것과 같다.

*Lemma 4.9*에서를 제외하고 이 항 내내 G 안의 등거리사상들 $\{w_i\}_{i=0}^\infty$, $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ 을 고정하고, $w_{0,2}^+ = id$ 로 두겠다. 각 $i \geq 1$ 에서 다음으로 이루어진 자취를 고려하겠다:

$$\begin{aligned} w_{i,2}^- &= w_{i-1,2}^+ w_{i-1}, & w_{i,1}^- &= w_{i,2}^- a_i, & w_{i,0}^- &= w_{i,2}^- a_i^2, \\ w_{i,0}^+ &= w_{i,2}^- a_i^2 v_i, & w_{i,2}^+ &= w_{i,2}^- a_i^2 v_i b_i^2. \end{aligned}$$

또 이들로 o 를 이동시킨 지점 $y_{i,t}^\pm = w_{i,t}^\pm o$ 를 고려하겠다. 여기서 a_i, b_i 는 S 에서 균등 측도를 기준으로 뽑혀 $s = (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ 로 기록된다. 이제 중추 시점 집합 P_n 및 유동점 z_n 을 귀납적으로 정의하겠다. 먼저 $P_0 = \emptyset$ 및 $z_0 = o$ 로 둔다. 이제 P_{n-1} 및 z_{n-1} 이 주어졌을 때, P_n 및 z_n 는 다음을 통해 결정된다.

- (1) 만약 $i = 0, 1$ 에 대해 $(z_{n-1}, y_{n,i}^-)_{y_{n,2}^-} < C_0$ 이고 $(y_{n,0}^+, y_{n+1,2}^-)_{y_{n,2}^+} < C_0$ 인 경우, $P_n = P_{n-1} \cup \{n\}$ 및 $z_n = y_{n,0}^+$ 로 둔다.
- (2) 그렇지 않은 경우, $N > 1$ 이고 $[y_{i(1),0}^+, y_{n+1,2}^-]$ 가 Schottky 선분들

$$(4.2) \quad (\gamma_i)_{i=1}^k = \left([y_{i(1),0}^+, y_{i(1),2}^+], [y_{i(2),1}^-, y_{i(2),0}^-], \dots, [y_{i(N),1}^-, y_{i(N),0}^-] \right),$$

$$(4.3) \quad (\eta_i)_{i=2}^k = \left([y_{i(2),2}^-, y_{i(2),1}^-], \dots, [y_{i(N),2}^-, y_{i(N),1}^-] \right).$$

로 (C_0, D_0) -머리부터 표시되어 있게 하는 수열 $\{i(1) < \dots < i(N)\} \subseteq P_{n-1}$ 를 찾겠다. 만약 그러한 수열이 존재하면, 그중 $i(1)$ 이 가장 큰 수열 $\{i(1) < \dots < i(N)\}$ 을 선택하여, $P_n = P_{n-1} \cap \{1, \dots, i(1)\}$ 및

$z_n = y_{i(N),1}^-$ 로 둔다. 만약 그러한 수열이 없다면, $P_n = \emptyset$ 및 $z_n = o$ 로 둔다.¹

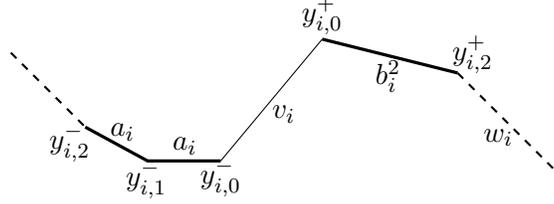


FIGURE 4. 자취 내 지점들 $y_{i,k}^{\pm}$.

중추 시점 i 에서의 지점 $y_{i,0}^-$ 및 $y_{i,0}^+$ 을 중추 지점이라고 부른다. 중추 시점에 관한 기본적인 사실들은 다음과 같다.

- (1) P_n 을 선택하는 방식은 a_i, b_i 선택지에 대해 가측이다.
- (2) $i \in P_m$ 는 i 가 i 단계에서 중추 시점으로 뽑히고 $i+1, \dots, m$ 단계에서 살아남아야만 성립한다.
- (3) $m < n$ 및 $i < j$ 에 대해, 만약 $i, j \in P_m$ 이고 $j \in P_n$ 이면 $i \in P_n$ 이다.

Lemma 4.5. P_n 안에 있는 연속된 중추 시점 $l < m$ 및 $t \in \{0, 1\}$ 을 생각하자. 그러면 $[y_{l,0}^+, y_{m,t}^-]$ 는 $\gamma_1 = [y_{l,0}^+, y_{l,2}^+]$ 및 $\eta_N = [y_{m,2}^-, y_{m,t}^-]$ 를 포함하는 어떤 Schottky 선분들 $(\gamma_i)_{i=1}^{N-1}, (\eta_i)_{i=2}^N$ 에 의해 완전히 (C_0, D_0) -표시되어 있다.

Proof. l 이 l 단계에서 중추 시점으로 뽑혔다는 점을 유의하라. 이는 $(y_{l,0}^+, y_{l+1,2}^-)_{y_{l,2}^+} < C_0$ 및 $z_l = y_{l,0}^+$ 임을 의미한다. 만약 $l = m-1$ 이고 m 이 $m = l+1$ 단계에서 새로 뽑혔다면, $(z_l, y_{m,t}^-)_{y_{m,2}^-} < C_0$ 역시 성립한다. 그러면 Lemma 3.7는 $[y_{m-1,0}^+, y_{m,t}^-]$ 가 $[y_{m-1,0}^+, y_{m-1,2}^+]$ 및 $[y_{m,2}^-, y_{m,t}^-]$ 에 의해 완전히 D_0 -표시되어 있다는 것을 암시한다.

만약 $l < m-1$ 이라면, l 가 P_{m-1} 에서도 두번째 기준에 따라 살아남았어야 한다. 즉, $[y_{l,0}^+, y_{m,2}^-]$ 가

$$\left([y_{l,0}^+, y_{l,2}^+], [y_{i(2),1}^-, y_{i(2),0}^-], \dots, [y_{i(N),1}^-, y_{i(N),0}^-] \right), \left([y_{i(2),2}^-, y_{i(2),1}^-], \dots, [y_{i(N),2}^-, y_{i(N),1}^-] \right)$$

에 의해 (C_0, D_0) -머리부터 기록되도록 하는 $l = i(1) < \dots < i(N)$ 가 존재하며, 이때 $z_{m-1} = y_{i(N),1}^-$ 까지 성립한다. m 역시 m 단계에서 새로 뽑히므로, $(z_{m-1}, y_{m,t}^-)_{y_{m,2}^-} < C_0$ 임을 안다. 그러면 Lemma 3.7는 $[x_{m-1}, y_{m,t}^-]$ 가 $([y_{i(N),1}^-, y_{i(N),0}^-], [y_{m,2}^-, y_{m,t}^-])$ 에 의해 D_0 -목격된다는 것을 암시하기에 원하던 결과를 얻는다. \square

¹만약 최대인 $i(1)$ 를 가지는 수열이 여러 개 존재한다면, 수열의 길이 및 $i(2), i(3), \dots$ 에 대해 사전적 순서를 주었을 때의 최댓점인 수열을 뽑는다.

Lemma 4.6. P_n 이 비어 있지 않고 $k = \min P_n$, $m = \max P_n$ 라고 두자. 그러면 $t = 0, 1$ 에 대해, $[o, y_{k,t}^-]$ 는 $[y_{k,2}^-, y_{k,t}^-]$ 에 의해 (C_0, D_0) -꼬리부터 표시되어 있다. 또한, $[y_{m,0}^+, y_{n+1,2}^-]$ 는 4.2, 4.3 형태의 선분들 $(\gamma_i)_{i=0}^N, (\eta_i)_{i=1}^N$ 에 의해 (C_0, D_0) -머리부터 표시되어 있는데, 이때 $\gamma_1 = [y_{m,0}^+, y_{m,2}^+]$ 로 둘 수 있다.

Proof. $k = \min P_n$ 라는 것은 P_{k-1} 이 공집합이었고 $z_{k-1} = o$ 였음을 의미한다. 또한, k 가 k 단계에서 새롭게 뽑혔다는 것이므로 $(o, y_{k,t}^-)_{y_{k,2}^-} = (z_{k-1}, y_{k,t}^-)_{y_{k,2}^-} < C_0$ 가 성립하며, 이는 원하던 결과를 암시한다. 두번째 명제를 증명하기 위해서는 m 이 어떻게 P_n 에서 살아남았는지를 관찰하겠다. 만약 $m = n$ 이고 첫 번째 기준에 의해 선택된 것이라면, $[y_{m,0}^+, y_{m+1,2}^-]$ 는 $\gamma_1 = [y_{m,0}^+, y_{m,2}^+]$ 에 의해 (C_0, D_0) -머리부터 표시되어 있어야 한다. 그렇지 않다면, m 은 두번째 기준에 의해 살아남은 것이고 이는 바로 원하던 결론이다. \square

Lemma 4.7. S 에서 균등 측도를 기준으로 a_i, b_i 를 뽑을 때, $\mathbb{P}(|P_{n+1}| = |P_n| + 1) \geq 9/10$ 가 성립한다.

Proof. $n+1$ 이 새로운 중추 시점이 된다는 것은 다음의 독립적인 조건 두 개가 성립한다는 것과 동치다. Proposition 4.2 직후의 참고사항에 따르면,

$$(4.4) \quad (z_{n-1}, y_{n,t}^-)_{y_{n,2}^-} = ((w_{n,2}^-)^{-1} z_{n-1}, a_n^{2-t} o)_o < C_0 \quad (t = 0, 1)$$

는 a_n 의 가능한 선택지 305개 중 적어도 304개에 대해 성립한다. 그러므로 그 확률은 0.99 이상이다. 마찬가지로, $(y_{n,0}^+, y_{n+1,2}^-)_{y_{n,2}^+} = (b_n^{-2} o, w_n o)_o < C_0$ 가 성립할 확률도 0.99 이상이다. 이 둘을 곱하면 원하는 계산 결과가 나온다. \square

[Gou21]에서와 같이, 중추 시점이 i_1, \dots, i_m 가 되게 하는 선택지 $s = (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ 에 대해, $\tilde{s} = (\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$ 가 s 로부터 방향 전환되었다(*pivoted from s*)는 것은 \tilde{s} 가 s 와 같은 중추 시점들을 가지고, 모든 i 에 대해 $\tilde{b}_i = b_i$ 이며, 중추 시점이 아닌 모든 i 에 대해 $\tilde{a}_i = a_i$ 라는 뜻이다.

Lemma 4.8 ([Gou21, Lemma 4.7]). 선택지 $s = (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ 를 위한 중추 시점 i 를 하나 고정하고, s 에서 a_i 를 \bar{a}_i 로 바꿔 얻어지는 선택지 \bar{s} 를 생각하자. 그러면 만약 $(z_{i-1}, y_{i,t}^-)_{y_{i,2}^-} < C_0$ 가 $t = 0, 1$ 에 대해 성립할 경우 \bar{s} 는 s 로부터 방향 전환된 것이며, 이를 만족시키는 \bar{a}_i 의 선택지가 최소 304개 존재한다.

Proof. 이번에도 Proposition 4.2 뒤의 참고사항에 의해, 최소 304개의 선택지가 위에 언급된 조건을 만족시킨다. 이제 위 조건이 성립한다고 가정하자. i 가 중추 시점이 되기 위한 또다른 조건 $(b_i^{-2} o, w_i o)_o < C_0$ 은 $(a_i$ 혹은 \bar{a}_i 가 아닌) b_i 에만 의존하므로 여전히 성립한다. 그러므로 i 는 \bar{P}_i 에 선발되고 $\bar{z}_i = \bar{y}_{i,1}^+$ 가 된다. 이후의 s 의 중추 시점을 결정하는 조건들은 사실 a_{i+1}, b_{i+1}, \dots 의 선택지에만 의존한다. 실제로, i 가 P_n 안에 포함되고 있고 i 이상으로 뒷걸음질이

일어나지 않기 때문에, 이후의 중추 시점을 위한 기준은 i 이전의 선택지들에는 의존하지 않는다. a_{i+1}, b_{i+1}, \dots 가 계속 똑같기 때문에, 중추 시점들은 유지된다. \square

위 증명 논리는 다음 보조정리 또한 이끌어낸다.

Lemma 4.9 (cf. [Gou21, Lemma 5.7]). 등거리사상 $(w_0, \dots, w_n), (v_1, \dots, v_n)$ 들이 주어졌을 때, i 가 선택지 s 를 위한 중추 시점이라고 하자. 그러면 v_i 가 다른 등거리사상으로 교체된다고 해도 s 의 중추 시점은 그대로 유지된다.

각 $s \in S^{2n}$ 에 대해, s 로부터 방향 전환된 선택지들의 모임을 $\mathcal{E}_n(s)$ 로 나타내겠다. $s \in S^{2n}$ 에 대한 $\mathcal{E}_n(s)$ 들은 S^{2n} 을 분할하는 동치류임에 유의하라.

Lemma 4.10 ([Gou21, Lemma 4.8]). 각각의 $j \geq 0$ 및 $s \in S^{2n}$ 에 대해 다음이 성립한다:

$$\mathbb{P}\left(|P_{n+1}(\tilde{s}, a_{n+1}, b_{n+1})| < |P_n(s)| - j \mid \tilde{s} \in \mathcal{E}_n(s)\right) \leq 1/10^{j+1}.$$

Proof. 먼저 $j = 0$ 에 대해, Lemma 4.7는

$$\mathbb{P}(|P_{n+1}| < |P_n|) \leq 1 - \mathbb{P}(|P_{n+1}| = |P_n| + 1) \leq 1/10$$

임을 암시한다.

이제 $l < m$ 가 s 의 마지막 두 중추 시점이라고 하자. $|P_{n+1}(s)| \neq |P_n(s)| + 1$ 이게 하는 ‘나쁜’ 선택지 (a_{n+1}, b_{n+1}) 과 함께, n 까지의 선택지 $\tilde{s} \in \mathcal{E}(s)$ 를 하나 고정하겠다. 여기서 m 단계까지의 \tilde{a}_i, \tilde{b}_i 를 고정해 두고 m 에서의 선택지만을 바꾼 선택지 $\tilde{s} = (\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{a}_m, \tilde{b}_m, \dots)$ 들의 모임을 $E(\tilde{s}) = E(a_{n+1}, b_{n+1}, \tilde{s}; m)$ 로 나타내겠다. Lemma 4.8에 의해, $\tilde{s} \in E(\tilde{s})$ 가

$$(4.5) \quad (\tilde{z}_{m-1}, \bar{y}_{m,t}^-)_{\bar{y}_{m,2}^-} = ((\tilde{w}_{m-1,2}^-)^{-1} \tilde{z}_{m-1}, \bar{a}_m^{2-t} o)_o < C_0 \quad (t = 0, 1)$$

를 만족시키면 $\mathcal{E}_n(s)$ 에 포함되며, 최소 304개의 선택지가 이에 해당한다. 이 경우 $l \in P_n(\tilde{s})$ 임을 알 수 있다.

이제

$$(4.6) \quad (\bar{y}_{m,1}^-, \bar{y}_{n+2,2}^-)_{\bar{y}_{m,0}^-} = (\bar{a}_m^{-1} o, v_m \tilde{b}_m^2 w_m \cdots v_{n+1} b_{n+1}^2 w_{n+1} o)_o < C_0.$$

을 추가로 만족시키는 \bar{a}_m 의 갯수를 세겠다. 이 조건들은 $(\bar{a}_m^{2-t} o, x)_o < C_0$ 혹은 $(\bar{a}_m^{-1} o, x)_o < C_0$ 형태의 조건들로, 여기서 x 자리에 들어가는 단어는 $E(\tilde{s})$ 전체에 걸쳐 고정된다. 그러므로, 기껏해야 선택지 2개만을 놓치게 된다.

이제 만약 \bar{a}_m 가 부등식 4.5 및 4.6을 만족하면, $|P_{n+1}(\tilde{s})| \geq |P_n(s)| - 1$ 임을 보이겠다. 먼저 $\max P_{m-1} = l$ 이고 m 가 이때 새로운 중추 시점으로 뽑히게 됨을 기억하라. Lemma 4.6에 의해, $[\tilde{y}_{l,0}^+, \tilde{y}_{m+1,2}^-]$ 가

$$\left([\tilde{y}_{i(1),0}^+, \tilde{y}_{i(1),2}^+], [\tilde{y}_{i(2),1}^-, \tilde{y}_{i(2),0}^-], \dots, [\tilde{y}_{i(N),1}^-, \tilde{y}_{i(N),0}^-]\right), \quad \left([\tilde{y}_{i(2),2}^-, \tilde{y}_{i(2),1}^-], \dots, [\tilde{y}_{i(N),2}^-, \tilde{y}_{i(N),1}^-]\right)$$

에 의해 (C_0, D_0) -머리부터 표시되도록 하고 (여기서 N 은 1이어도 된다) $z_{m-1} = \tilde{y}_{i(N),1}^-$ 이도록 하는 $\{l = i(1) < \dots < i(N)\} \subseteq P_{m-1}$ 가 존재한다. 부등식 4.5 및 Lemma 3.7에 의해, $[\tilde{y}_{i(N),1}^-, \bar{y}_{m,1}^-]$ 는 $([\tilde{y}_{i(N),1}^-, \tilde{y}_{i(N),0}^-], [\bar{y}_{m,2}^-, \bar{y}_{m,1}^-])$ 에 의해 D_0 -목격된다. 부등식 4.6에 의해, $[\bar{y}_{m,1}^-, \bar{y}_{n+2,2}^-]$ 는 $[\bar{y}_{m,1}^-, \bar{y}_{m,0}^-]$ 에 의해 (C_0, D_0) -머리부터 표시된다. 마지막으로, $[\bar{y}_{m,1}^-, \bar{y}_{m,2}^-]$ 와 $[\bar{y}_{m,1}^-, \bar{y}_{m,0}^-]$ 는 D_0 -붙여져 있다. 따라서, $[\tilde{y}_{l,0}^+, \bar{y}_{n+1,2}^-]$ 는

$$\left([\tilde{y}_{i(1),0}^+, \tilde{y}_{i(1),2}^+], [\tilde{y}_{i(2),1}^-, \tilde{y}_{i(2),0}^-], \dots, [\tilde{y}_{i(N),1}^-, \tilde{y}_{i(N),0}^-], [\bar{y}_{m,1}^-, \bar{y}_{m,0}^-] \right), \\ \left([\tilde{y}_{i(2),2}^-, \tilde{y}_{i(2),1}^-], \dots, [\tilde{y}_{i(N),2}^-, \tilde{y}_{i(N),1}^-], [\bar{y}_{m,2}^-, \bar{y}_{m,1}^-] \right)$$

에 의해 (C_0, D_0) -머리부터 표시된다. 다시 말해, $P_{n+1}(\bar{s}, a_{n+1}, b_{n+1})$ 가 $P_n(s) \cap \{1, \dots, l\}$ 보다 크고 $|P_{n+1}| \geq |P_n| - 1$ 가 성립한다.

요약하자면, $\bar{s} \in \mathcal{E}_n(s)$ 이도록 하는 최대 305개의 \bar{a}_m 선택지 중 최소 303개의 \bar{a}_m 선택지가 $|P_{n+1}(\bar{s})| \geq |P_n(\bar{s})| - 1$ 을 만족시킨다. 따라서, $E(\bar{s}) \cap \mathcal{E}_n(s)$ 에 한정해 생각했을 때, $|P_{n+1}(\bar{s})| < |P_n(\bar{s})| - 1$ 일 확률은 $1/10$ 이하이다. 이를 모든 $\bar{s} \in \mathcal{E}(s)$ 선택지에 대해 더해 생각해 보면, ‘나쁜’ 선택지 (a_{n+1}, b_{n+1}) 를 고정했을 때, $|P_{n+1}(\bar{s})| < |P_n(\bar{s})| - 1$ 일 확률은 $1/10$ 이하이다. 마지막으로, 나쁜 선택지 (a_{n+1}, b_{n+1}) 는 총 선택지 중 확률 $1/10$ 이하를 차지하므로, $\mathbb{P}(|P_{n+1}(\bar{s})| < |P_n(\bar{s})| - 1) \leq (1/10) \times (1/10)$ 를 얻는다.

$j = 2$ 일 때는, 각각의 나쁜 선택지 a_m, a_{n+1}, b_{n+1} 및 ($\bar{a}_m = a_m$ 인) n 까지의 선택지 $\bar{s} \in \mathcal{E}(s)$ 를 고정하고, l 에서의 선택지만을 바꾸겠다. 그 경우 비슷한 방식으로 $|P_{n+1}(\bar{s})| < |P_n(\bar{s})| - 2$ 일 확률이 $1/10$ 보다 작다는 것을 알 수 있다. 이제 나쁜 선택지 (a_m, a_{n+1}, b_{n+1}) 들이 차지하는 확률(이는 10^{-2} 보다 작다)을 곱해 원하던 결론을 얻을 수 있다. 이러한 방식을 계속하여 모든 $j < |P_n(s)|$ 에 대한 결론을 얻는다. $j \geq |P_n(s)|$ 부터는 의미가 없는 경우이다. \square

각 동치류 $\mathcal{E}_n(s)$ 에서의 위 계산은 다음 결론으로 이어진다.

Proposition 4.11 ([Gou21, Proposition 4.10]). *모든 n 및 모든 선택지 w_i, v_i 에 대해 $\mathbb{P}(|P_n| \leq \kappa_0 n) \leq e^{-\kappa_0 n}$ 이 성립하게끔 하는 $\kappa_0, K_0 > 0$ 이 존재한다.*

Proof. 양수 기댓값을 가지고 지수적인 꼬리를 가지는 적당한 i.i.d. U_i 에 대해 분포적으로 $|P_n| \geq \sum_{i=1}^n U_i$ 이기 때문에 주어진 부등식이 성립한다. \square

5. 랜덤 워크에서의 중추 시점

5.1. **첫번째 모델과 방향 전환** 첫번째로 고려할 모델은 Gouézel이 [Gou21]에서 제시한 모델 중 하나와 사실상 같다. $c \in S_0$ 와 $|S| = 305$ 인 $S \subseteq S_0 \setminus \{c\}$ 를 하나 잡자. 각 $s \in S_0$ 가 supp^N 에 속한다는 것을 상기하면서, $a_1(s) \cdots a_N(s) = s$ 인 날자 $a_1(s), \dots, a_N(s) \in \text{supp } \mu$ 를 고정하자. 이때 집합 $\{(a_1(s), \dots, a_N(s), a_1(S), \dots, a_N(S)) :$

$s \in S$ 위의 균등 측도를 $\mu_{S(2)}$ 로 적고, $(a_1(c), \dots, a_N(c), a_1(c), \dots, a_N(c))$ 에 집중된 측도를 $1_{\{c\}^2}$ 로 적겠다. 그러면

$$\mu^{6N} = \alpha(\mu_{S(2)} \times 1_{\{c\}^2} \times \mu_{S(2)}) + (1 - \alpha)\nu$$

가 성립하게 하는 측도 ν 및 $0 < \alpha < 1$ 이 존재한다. 여기서 $\eta = \mu_{S(2)} \times 1_{\{c\}^2} \times \mu_{S(2)}$ 로 두고 Subsection 2.3의 세팅을 가져오기로 하자. 다시 말해, 독립적인 확률 변수 $\{\rho_i, \eta_i, \nu_i\}$ 및 보조 확률 변수 $\mathcal{N}(k)$, $\vartheta(i)$ 가 결정되었다는 뜻이다. 이와 함께, α_i (갈음하여, β_i)를 η_i 의 첫 N 개 성분(갈음하여, 마지막 N 개 성분)의 합성으로 정의하겠다. 그러면 $\{\rho_i, \alpha_i, \beta_i, \nu_i\}$ 는 모두 독립적이다.

고정된 n 에 대해, $\gamma' = g_{6N \lfloor n/6N \rfloor + 1} \cdots g_n$ 으로 두면

$$(5.1) \quad w_n = \gamma_1^* \cdots \gamma_{\lfloor n/6N \rfloor}^* \gamma' = w_0 \cdot a_1^2 c^2 b_1^2 \cdot w_1 \cdot a_2^2 c^2 b_2^2 \cdots a_{\mathcal{N}(\lfloor n/6N \rfloor)}^2 c^2 b_{\mathcal{N}(\lfloor n/6N \rfloor)}^2 \cdot w'_{\mathcal{N}(\lfloor n/6N \rfloor)}$$

$$\left(\begin{array}{l} w_i = \nu_{\vartheta(i)+1}^* \cdots \nu_{\vartheta(i+1)-1}^*, \quad a_i = \alpha_{\vartheta(i)}, \quad b_i = \beta_{\vartheta(i)}, \\ w'_{\mathcal{N}(\lfloor n/6N \rfloor)} = \nu_{\vartheta(\mathcal{N}(\lfloor n/6N \rfloor))+1}^* \cdots \nu_{\lfloor n/6N \rfloor}^* \gamma'. \end{array} \right)$$

가 성립함을 알 수 있다. 이 상황에서 $w_{i,j}^\pm$ 및 $y_{i,j}^\pm$ 이라는 표기법을 계속 사용하겠다. 이때

$$w_{i,2}^- = \omega_{6N(\vartheta(i)-1)}, \quad w_{i,2}^+ = \omega_{6N\vartheta(i)}$$

임을 유의하라.

이제 Subsection 4.2에서와 같이 중추 시점을 정의하겠다. 여기서 n 까지의 중추 시점 집합 $P_n(\omega)$ 은 $\{\rho_i, \nu_i\}_{i=1}^{\lfloor n/6N \rfloor}$, γ' 및 $s = (a_1, b_1, \dots, a_{\mathcal{N}(\lfloor n/6N \rfloor)}, b_{\mathcal{N}(\lfloor n/6N \rfloor)})$ 의 선택지에 의존한다. 이전과 같이, 어떤 자취 $\tilde{\omega}$ 가 ω 로부터 방향 전환되었다는 것은 ω 의 중추 시점 j 에 대한 α_j 들을 제외한 $\rho_i, \alpha_i, \beta_i, \nu_i$ 값이 일치한다는 뜻이다. 마지막으로, $Q_n(\omega) := \cap_{k \geq n} P_k(\omega)$ 과 궁극적인 중추 시점의 집합 $Q = \cup_n Q_n$ 을 정의하겠다.

$\mathcal{N}(k)$ 가 양수 기댓값 및 지수적인 꼬리를 가지는 i.i.d.의 합이기에, $\mathbb{P}(\mathcal{N}(\lfloor n/6N \rfloor) \leq \kappa'n) \leq K'e^{-\kappa'n}$ 가 성립하는 $K', \kappa' > 0$ 이 존재한다. (결정되는 순간 $\mathcal{N}(k)$, $\vartheta(i)$ 도 결정되는) ρ_i 가 결정되었을 때, $\{a_1, b_1, \dots, a_{\mathcal{N}(\lfloor n/6N \rfloor)}, b_{\mathcal{N}(\lfloor n/6N \rfloor)}\}$ 는 S 에서 균등 측도를 따라 독립적으로 뽑힌다. 이를 Proposition 4.11와 결합하면, $\mathbb{P}(|P_n| \leq \kappa_0 \kappa'n) \leq e^{-\kappa_0 \kappa'n} + K'e^{-\kappa'n}$ 임을 얻는다.

또한, P_n, P_{n+1}, \dots 를 결정하는 자취들이 모두 $b_{\mathcal{N}(\lfloor n/6N \rfloor)}$ 까지의 날자를 공유한다는 사실을 주목하라. 이에 따라 P_n, P_{n+1}, \dots 의 첫 $\min\{|P_n|, |P_{n+1}|, \dots\}$ 개 중추 시점은 일치하며, 이는 Q_n 을 이룬다. 특히, Q 의 첫 $\min\{|P_n|, |P_{n+1}|, \dots\}$ 개 중추 시점이 Q_n 을 구성하며 $|Q_n| = \min\{|P_n|, |P_{n+1}|, \dots\}$ 이 성립한다. 이로부터 다음을 알 수 있다.

Proposition 5.1. $\mathbb{P}(|P_n| \leq \kappa_1 n) \leq K_1 e^{-\kappa_1 n}$ and $\mathbb{P}(|Q_n| \leq \kappa_1 n) \leq K_1 e^{-\kappa_1 n}$ 이 성립하게끔 하는 $\kappa_1, K_1 > 0$ 이 존재한다.

여기서 두번째 부등식은 다음으로부터 얻어진다:

$$\mathbb{P}(|Q_n| \leq \kappa_0 n) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(|P_i| \leq \kappa_0 i) \leq \frac{1}{1 - e^{-\kappa_0}} e^{-\kappa_0 n} + \frac{1}{1 - e^{-\kappa'}} e^{-\kappa' n}.$$

이제 중추 시점과 자취의 정렬을 연관지을 차례다. $c \neq a, b$ 이므로,

$$(co, a^{-2}o)_o < C_0, \quad (c^{-1}o, b^2o)_o < C_0$$

임을 알 수 있다. 또한, $(o, co)_{co}, (o, c^2o)_{co} < C_0$ 이므로 $[o, c^2o]$ 가 $([o, co], [co, c^2o])$ 에 의해 D_0 -목격된다. Lemma 4.5 및 4.6을 이용하면, 각 중추 시점 j 에 대한 $[y_{j,2}^-, y_{j,0}^-], [y_{j,0}^+, y_{j,2}^+]$ 를 포함하는 Schottky 선분의 나열들에 의해 $[o, \omega_n o]$ 가 (C_0, D_0) -표시되어 있음을 알 수 있다. 여기서 Schottky 선분끼리 붙여진 지점은 각 중추 시점 j 에 대한 $y_{j,0}^-, y_{j,0}^+$ 들을 포함한다. 이제 Schottky 선분들이 $L_0 \geq L_1, L_2, 2[6D_0 + 2F_0 + 8\delta + 1]$ 보다 길다는 것을 상기하라. 그러면 Corollary 3.11로부터 다음을 알 수 있다,

Proposition 5.2. $\{\rho_i, \nu_i, s\}$ 의 값이 주어졌을 때, $j(1), \dots, j(|P_n(\omega)|)$ 를 $P_n(\omega)$ 을 구성하는 중추 시점이라고 하자. 또한 $x_0 = o, x_{2|P_n(s)|+1} = \omega_n o$ 및

$$(x'_{2l-1}, x_{2l-1}, x_{2l}, x'_{2l}) = (y_{j(l),2}^-, y_{j(l),0}^-, y_{j(l),0}^+, y_{j(l),2}^+) \quad (l = 1, \dots, |P_n(\omega)|)$$

을 정의하자. 그러면 각 $0 \leq i \leq j \leq k \leq 2|P_n(s)| + 1$ 에 대해

$$(x_i, x_k)_{x_j} < F_0, \quad d(x_i, x_{j+1}) \geq d(x_i, x_j) + L_0/2$$

이 성립한다. 또한, $i < 2j - 1 \leq k$ (같은하여, $i \leq 2j < k$)이면 $[x_i, x_k]$ 가 $[x'_{2j-1}, x_{2j-1}]$ (같은하여, $[x_{2j}, x'_{2j}]$)에 의해 F_0 -목격된다.

다음 보조정리는 Theorem D의 증명에서만 사용될 것이다. 역방향 자취 $\check{\omega}$ 에 대해서도 $S^{-1} = \{s^{-1} : s \in S\}$ 에서 뽑은 선택지들을 가지고 역방향 중추 시점들을 정의할 수 있다. Proposition 5.1에 의해, 거의 모든 $(\check{\omega}, \omega)$ 은 무수히 많은 궁극적인 정방향 중추 시점 $\{i(1), i(2), \dots\}$ 및 궁극적인 역방향 중추 시점 $\{\check{i}(1), \check{i}(2), \dots\}$ 을 가지고 있다. 이제 첫 n 개 정방향/역방향 중추 시점에서 방향 전환을 하겠다. $1 \leq l \leq k$ 에 대한 $a_{i(1)}, \check{a}_{i(1)}, \dots, a_{i(k-1)}, \check{a}_{i(k-1)}$ 선택지가 주어졌을 때,

$$(1) (\check{y}_{\check{i}(k),0}^-, y_{i(k),2}^-)_{\check{y}_{\check{i}(k),2}^-} < C_0,$$

$$(2) (\check{y}_{\check{i}(k),0}^-, y_{i(k),0}^-)_{y_{i(k),2}^-} < C_0$$

를 만족하는 선택지 $a_{i(k)}, \check{a}_{i(k)}$ 를 찾겠다. 최대 305×305 개의 가능한 선택지들 중 최소 303×303 개의 선택지들이 이 조건들을 만족시킨다. 이 사실을 귀납적으로 적용하면, 다음을 알 수 있다:

Lemma 5.3. 거의 모든 양방향 자취 $(\check{\omega}, \omega)$ 에 대해 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 이 존재하여, 만약 $|Q_k| \geq m$ 및 $|\check{Q}_k| \geq m$ 이라면:

- (1) 각 $l = m, \dots, |Q_k(\omega)|$ 마다 $[\check{\omega}_{k'}o, \omega_k o]$ 가 $y_{i(l),0}^\pm$ 에 F_0 -가깝고,
 (2) 각 $l = m, \dots, |Q_k(\omega)|$ 마다 $x = y_{i(l),0}^\pm$ 에 대해 $(\check{\omega}_{k'}o, \omega_k o)_x \leq F_0$ 이다.

5.2. **방향 전환과 그 결과물** Maher와 Tiozzo가 [MT18]에서 증명한 약한 쌍곡군 위에서 초등적이지 않은 랜덤 워크는 무한히 멀리 탈출한다는 결과를 Gouëzel은 중추 지점들이 많다는 것을 이용해 [Gou21]에서 재발견했다. 여기서 는 이와 유사한 Kaimanovich와 Masur의 결과를 재발견하겠다.

Corollary 5.4 (cf. [KM96, Theorem 2.2.4]). *Teichmüller 공간에서 거의 모든 샘플 자취는 무한히 멀리 탈출하고 유일하게 에르고딕한 엽층으로 수렴한다.*

Proof. Proposition 5.1 및 Borel-Cantelli 보조정리에 의해, 거의 모든 자취 ω 에서 $|Q_n(\omega)|$ 는 무한히 커진다. 그러면 무한한 탈출은 Proposition 5.2에 의해 따라 나온다.

일반적인 Arzelà-Ascoli 논법에 의해, $\{\gamma_n = [o, \omega_n o]\}$ 가 어떤 한방향-무한한 측지선 γ 로 수렴하는 부분열 $\{\gamma_{n_i}\}$ 를 가짐을 알 수 있다. 여기서 Lemma 3.10에 의해 γ_n 들은 각각의 궁극적인 중추 지점 결국에는 F_0 -가까워진다는 점을 알 수 있다. 특히, γ 는 ϵ -얇은 부분에 궁극적으로 들어갈 수는 없고, γ 의 세로 엽층 V_γ 은 유일하게 에르고딕하다 ([Mas92, Theorem 1.1]). 여기서 γ 는 $\zeta = [V_\gamma] \in \mathcal{PMF}$ 로 수렴한다.

이제 $\{y_{i(k),0}^-\}_{n=1}^\infty$ 도 ζ 로 향하는데, 이들이 γ 에 F_0 -가까우면서 무한히 멀리 탈출하기 때문이다. 더욱이 $d(o, y_{i(|Q_n|),0}^-) - d(y_{i(|Q_n|),0}^-, \omega_n o) \geq d(o, y_{i(|Q_n|),0}^-) - 2F_0$ 임을 관찰하라. $y_{i(|Q_n|),0}^-$ 가 ζ 로 향하기에, [KM96]의 Lemma 1.4.2에 의해 $\omega_n o$ 또한 그리 향한다. \square

이제 Theorem A의 증명을 살펴 보자.

Proof of Theorem A. λ 를 ω 의 탈출 속도라고 하자. 일반성을 잃지 않고, $\kappa_1 < \lambda/(8\mathcal{M} + 8F_0)$ 라고 가정할 수 있다. 이제 $M = \frac{2}{\kappa_1 \log 50}$ 를 잡자. 각 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 에 대해, $m = \lfloor M \log n \rfloor$ 로 두고 다음 집합들을 정의하겠다:

$$\begin{aligned} E_{n,1} &= \{\omega \in \Omega : |Q_m(\omega)| \geq \kappa_1 m\}, \\ E_{n,2} &= \{\omega \in \Omega : \text{모든 } i \leq m \text{에 대해 } d(o, \omega_i o) \leq 2\lambda m\} \\ E_{n,3} &= \{\omega \in \Omega : d(o, \omega_n o) > 0.5\lambda n\}, \\ F_n &= \{\omega \in E_{n,1} \cap E_{n,2} \cap E_{n,3} : |d(o, \omega_n o) - \tau(\omega_n)| \geq 5\lambda m\}. \end{aligned}$$

ω 에서 처음 $\lfloor \kappa_1 m \rfloor$ 개 중추 시점에서만 방향 전환된 자취들의 모임을 $\mathcal{E}_m^{\kappa_1 m}(\omega)$ 로 나타내겠다. $\omega \in F_n$ 를 고정하고, $\mathbb{P}(F_n | \mathcal{E}_m^{\kappa_1 m}(\omega))$ 를 어렵할 것이다.

ω 의 첫 $\lfloor \kappa_1 m \rfloor$ 개 중추 시점이 $i(1), \dots, i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor)$ 라고 하자. 이때 $\omega \in E_{n,1} \cap E_{n,2}$ 로부터 $d(o, w_{i(l),2}^-) = d(o, \omega_{6N \vartheta(i(l))} o) \leq 2rm$ 가 각 $l = 1, \dots, \lfloor \kappa_1 m \rfloor$ 에

대해 성립함을 알 수 있다. Lemma 4.8에 의해, 최소 304개의 $\bar{a}_{i(1)}$ 선택지가 $\bar{\omega}$ 를 ω 로부터 방향 전환되게끔 만들어 준다. 이 각각의 선택지들에 대해, 최소 304개의 $\bar{a}_{i(2)}$ 선택지가 $\bar{\omega}$ 를 ω 로부터 방향 전환되게끔 만들어 준다. 귀납적으로, $\bar{\omega} \in \mathcal{E}_m^{\kappa_1 m}(\omega)$ 를 위한 선택지가 최소 $304^{\lfloor \kappa_1 m \rfloor}$ 개는 존재한다.

이에 반해, $\bar{\omega} \in \mathcal{E}_m^{\kappa_1 m}(\omega) \cap F_n$ 이게끔 하는 $\bar{a}_{i(1)}$ 과 $\bar{a}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor)}$ 선택지는 몇 개 없음을 관찰하겠다. 먼저

$$\begin{aligned} d(o, \bar{y}_{i(l),2}^-) &\leq d(o, \bar{y}_{i(1),2}^-) + \sum_{k=1}^{l-1} d(\bar{y}_{i(k),2}^-, \bar{y}_{i(k+1),2}^-) \\ &\leq d(o, y_{i(1),2}^-) + \sum_{k=1}^{l-1} \left[d(y_{i(k),2}^-, y_{i(k+1),2}^-) + d(a_{i(k)}^{-2} o, \bar{a}_{i(k)}^{-2} o) \right] \\ &\leq d(o, y_{i(1),2}^-) + \sum_{k=1}^{l-1} \left[d(y_{i(k),2}^-, y_{i(k+1),2}^-) + d(a_{i(k)}^{-2} o, \bar{a}_{i(k)}^{-2} o) + 2F_0 - 2(o, y_{i(l+1),2}^-) y_{i(l),2}^- \right] \\ &\leq d(o, y_{i(l),2}^-) + 2\lfloor \kappa_1 m \rfloor (\mathcal{M} + F_0) \leq 2\lambda m + 2\lfloor \kappa_1 m \rfloor (\mathcal{M} + F_0) \end{aligned}$$

및 $d(o, \bar{y}_{i(l),0}^-) \leq 2\lambda m + 2\lfloor \kappa_1 m \rfloor (\mathcal{M} + F_0) + \mathcal{M}$ 가 $l = 1, \dots, \lfloor \kappa_1 m \rfloor$ 에 대해 성립한다.

이제 $v = (\bar{w}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor),0}^-)^{-1} \bar{\omega}_n \bar{w}_{i(1),2}^-$ 로 두자. 이 v 는 $i(1), \dots, i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor)$ 에서의 방향 전환에 영향을 받지 않는다. 또한,

$$\begin{aligned} (5.2) \quad d(o, vo) &\geq d(o, \omega_n o) - d(o, y_{i(k),0}^-) - d(o, y_{i(1),2}^-) \\ &\geq 0.5\lambda n - 4\lambda m - 4\lfloor \kappa_1 m \rfloor (\mathcal{M} + F_0) - \mathcal{M} \geq 2\mathcal{M} + 3D_0 \end{aligned}$$

가 충분히 큰 n 에 대해 성립한다.

이제 $\bar{a}_{i(1)}$, $\bar{a}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor)}$ 가

$$(5.3) \quad (\bar{a}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor)}^{-1} o, vo)_o < C_0, \quad (\bar{a}_{i(1)}^2 o, v^{-1} o)_o < C_0$$

를 만족시킨다고 가정하자. 그러면 다음을 알 수 있다.

- (1) $[\bar{y}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor),1}^-, \bar{\omega}_n \bar{y}_{i(1),0}^-]$ 가 $[\bar{y}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor),1}^-, \bar{y}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor),0}^-]$, $[\bar{\omega}_n \bar{y}_{i(1),2}^-, \bar{\omega}_n \bar{y}_{i(1),0}^-]$ 에 의해 D_0 -목격된다는 것: 이는 부등식 5.2, Lemma 3.6, 그리고 $d(o, \bar{a}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor)}^{-1} o)$, $d(o, \bar{a}_{i(1)}^2 o) < \mathcal{M}$ 때문이다.
- (2) $[\bar{y}_{i(1),0}^-, \bar{y}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor),1}^-]$ 는 $\gamma_1 = [\bar{w}_{i(1),0}^-, \bar{w}_{i(1),0}^- co]$, $\eta_N = [\bar{y}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor),2}^-, \bar{y}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor),1}^-]$ 인 적당한 선분 나열들 $(\gamma_i)_{i=1}^{N-1}$ 과 $(\eta_i)_{i=2}^N$ 에 의해 (C_0, D_0) -표시되어 있는데: 이는 $i(1), i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor) \in Q(m)$ 이기 때문이다.
- (3) $[\bar{y}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor),1}^-, \bar{y}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor),2}^-]$ 와 $[\bar{y}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor),1}^-, \bar{y}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor),0}^-]$ 는 C_0 -붙여져 있다.
- (4) $[\bar{w}_{i(1),0}^-, \bar{w}_{i(1),0}^- co]$ 와 $[\bar{y}_{i(1),0}^-, \bar{y}_{i(1),2}^-]$ 는 C_0 -붙여져 있다.

Corollary 3.11를 적용하면, 이들은

$$\dots, \bar{\omega}_n^{-1} \bar{y}_{i(1),0}^-, \bar{\omega}_n^{-1} \bar{y}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor),1}^-, \bar{y}_{i(1),0}^-, \bar{y}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor),1}^-, \bar{\omega}_n \bar{y}_{i(1),0}^-, \bar{\omega}_n \bar{y}_{i(\lfloor \kappa_1 m \rfloor),1}^-, \dots$$

점들 간 (올바른 순서상에서) Gromov 내적 값이 기껏해야 F_0 이하라는 사실을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} \tau(\bar{\omega}_n) &= \lim_k \frac{1}{k} d(\bar{y}_{i(1),0}^-, \bar{\omega}_n^k \bar{y}_{i(1),0}^-) \\ &= \lim_k \frac{1}{k} \left[d(\bar{y}_{i(1),0}^-, \bar{\omega}_n \bar{y}_{i(1),0}^-) + \sum_{j=2}^k \left[d(\bar{\omega}_n^{j-1} \bar{y}_{i(1),0}^-, \bar{\omega}_n^j \bar{y}_{i(1),0}^-) - 2(\bar{y}_{i(1),0}^-, \bar{\omega}_n^j \bar{y}_{i(1),0}^-)_{\bar{\omega}_n^{j-1} \bar{y}_{i(1),0}^-} \right] \right] \\ &\geq d(\bar{y}_{i(1),0}^-, \bar{\omega}_n \bar{y}_{i(1),0}^-) - 2F_0 \\ &\geq d(o, \bar{\omega}_n o) - 2d(o, \bar{y}_{i(1),0}^-) - 2F_0 \end{aligned}$$

이고, $d(o, \bar{\omega}_n, o) - \tau(\bar{\omega}_n) \leq 4\lambda m + 4[\kappa_1 m](\mathcal{M} + F_0) + 2\mathcal{M} + 2F_0 \leq 5\lambda m$ 가 충분히 큰 n 에 대해 성립한다: 이 경우 $\bar{\omega} \notin F_n$ 이다.

요약하자면, (Lemma 4.8과 부등식 5.3을 만족하는) 최소 303^2 개의 $(\bar{a}_{i(1)}, \bar{a}_{i([\kappa_1 m])})$ 선택지는 $\bar{\omega} \in \mathcal{E}_m^{\kappa_1 m} \cap F_n$ 경우에 해당하지 않음을 알 수 있다. 이제 $(\bar{a}_{i(1)}, \bar{a}_{i([\kappa_1 m])})$ 가 그러하지 않은 최대 $305^2 - 303^2$ 선택지 중 하나라고 가정하자. 각 경우에 서, 마찬가지로 최소 303^2 개의 $(\bar{a}_{i(2)}, \bar{a}_{i([\kappa_1 m]-1)})$ 선택지는 $\bar{\omega} \in \mathcal{E}_m^{\kappa_1 m} \cap F_n$ 에 해당하지 않고 최대 $305^2 - 303^2$ 개의 선택지만이 남음을 알 수 있다. 이를 계속하면,

$$\mathbb{P}(F_n | \mathcal{E}_m^{\kappa_1 m}) \leq \left(\frac{305^2 - 303^2}{304^2} \right)^{[\kappa_1 m/2]} \leq 50 \cdot (0.02)^{\kappa_1 M \log n} \leq 50n^{-2}$$

가 충분히 큰 n 에 대해 성립함을 알 수 있다. 이를 다양한 $\mathcal{E}_m^{\kappa_1 m}(\omega)$ 위에서 어렵 해 더하여 $\mathbb{P}(F_n) \leq 50n^{-2}$ 임을 얻는다. Borel-Cantelli 보조정리에 의해, 거의 모든 ω 는 F_n 를 결국에는 벗어난다.

이제 ω 가 궁극적으로 F_k 를 벗어나나 무수히 많은 n 에 대해 $d(o, \omega_n o) - \tau(\omega_n) \geq 5M \log n$ 가 성립한다고 가정하자. 이는 $|Q_n(\omega)| < \kappa_1 n$ 가 무수히 자주 일어나거나 $|d(o, \omega_n o) - rn| \geq 0.5\lambda n$ 가 무수히 자주 일어난다는 뜻이다. $\mathbb{P}\{|Q_n(\omega)| < \kappa_1 n\}$ 를 n 에 대해 합하면 유한하니 첫번째 사항의 확률은 0이고, 준가법적 에르고딕 정리에 의해 두번째 사항의 확률도 0이다. \square

방금 증명에서 결정적인 역할을 한 요소는 o 와 궁극적인 중추 간의 거리가 선형적으로 증가한다는 것인데, 이는 준가법적 에르고딕 정리가 만들어낸 결과다.

사실 n 단계까지의 선택지와 무관하게, n 직후의 궁극적인 중추 시점은 곧이어 등장하고, 그 오차 확률은 지수적으로 감소한다. 이 사실이 Theorem D의 증명으로 이어지리라 기대할 수 있겠으나, 이렇게 중추 시점들이 제때 등장함에도 불구하고, n 번째 위치와 그다음 궁극적인 중추 지점 간의 거리 또한 시간에

비례할 것이라고 확신할 수는 없다. 기준 단계 n 이 계속 변하므로, 여기에는 준가법적 에르고딕 정리를 적용할 수 없다. 그러므로 우리는 다른 접근법을 택할 것이다.

Lemma 5.5. 모든 $g_{k+1} \in G$ 및 $x \in X$ 에 대해,

$$\mathbb{P} \left[\sup_{n \geq k} (x, \omega_n o)_o \geq d(o, \omega_k o) \mid g_{k+1} \right] \leq K_2 e^{-\kappa_2 k}$$

가 성립하게끔 하는 $\kappa_2, K_2 > 0$ 가 존재한다. 더 나아가, 모든 $n \geq k$, $g_{k+1}, \dots, g_n \in G$ 및 $x \in X$ 에 대해서도

$$\mathbb{P} [(x, \omega_n o)_o \geq d(o, \omega_k o) \mid g_{k+1}, \dots, g_n] \leq K_2 e^{-\kappa_2 k}$$

이다. 마지막으로, $\check{g}_1, \dots, \check{g}_{k+1} \in G$ 가 추가로 주어졌을 때도,

$$\mathbb{P} \left[\limsup_n (\check{\omega}_n o, \omega_n o)_o \geq d(o, \omega_k o) \mid g_{k+1}, \check{g}_1, \dots, \check{g}_{k+1} \right] \leq K_2 e^{-\kappa_2 k}$$

가 성립한다.

Proof. Subsection 5.1에서 다른 모델을 다시 떠올려 보자. 이번에는 $g_{6N\lfloor k/6N \rfloor + 1}, \dots, g_{6N(\lfloor k/6N \rfloor + 1)}$ 를 일시적으로 고정하고 이들을 잠재적인 증추 시점 후보에서 제외하자. 이러한 조작은 예를 들어 각 $\mathcal{N}(n)$ 를 기껏해야 1만큼 감소시키므로 전반적인 어림은 달라지지 않는다. 특히, Proposition 5.1에서와 같은 $\kappa_1, K_1 > 0$ 에 대해, $\mathbb{P}(|Q_k| \leq \kappa_1 k - 1 \mid g_{iN}, \dots, g_{(i+1)N-1}) \leq K_1 e^{-\kappa_1 k}$ 임을 관찰할 수 있다.

이제 $|Q_k(\omega)| \geq \kappa_1 k - 1$ 인 각 ω 에 대해, ω 로부터 $Q_k(\omega)$ 안의 첫 $\lceil \kappa_1 k - 1 \rceil$ 개 증추 시점 $i(1), \dots, i(\lceil \kappa_1 k - 1 \rceil)$ 에서 방향 전환된 자취들의 동치류 $\mathcal{E}_{Q_k}^{\kappa_1 k - 1}(\omega)$ 를 생각하겠다. 그러면 각 $\tilde{\omega} \in \mathcal{E}_{Q_k}^{\kappa_1 k - 1}(\omega)$ 에 대해 $Q_k(\tilde{\omega}) = Q_k(\omega)$ 가 성립한다.

첫번째 주장을 $\tilde{\omega} \in \mathcal{E}_{Q_k}^{\kappa_1 k - 1}(\omega)$ 에 대해 살펴 보자. 어떤 $n \geq k$ 에 대해 $(x, \tilde{\omega}_n o)_o \geq d(o, \tilde{\omega}_k o)$ 라고 가정하자. 그러면 $(x, \tilde{\omega}_n o)_o \geq d(o, \tilde{\omega}_k o) \geq d(o, \tilde{w}_{i(1),0}^- o)$ 이고, $i(1) \in Q_n$ 이므로 $[o, \tilde{\omega}_n o]$ 는 $[\tilde{w}_{i(1),2}^-, \tilde{w}_{i(1),0}^- o]$ 에 의해 F_0 -목격된다. 그러므로, 만약 $\tilde{a}_{i(1)}$ 를 위한 선택지 두 개 a, a' 가 위 조건을 만족시키면, Lemma 3.12에 의해 $[o, x]$ 는 $[\tilde{w}_{i(1),2}^-, \tilde{w}_{i(1),2}^- a^2 o]$ 및 $[\tilde{w}_{i(1),2}^-, \tilde{w}_{i(1),2}^- a'^2 o]$ 에 의해 G_0 -목격된다. 그러면 Lemma 3.10는 $[x, x]$ 가 $[\tilde{w}_{i(1),2}^-, \tilde{w}_{i(1),2}^- a^2 o]$ 에 의해 F_1 -목격된다는 것을 암시해 모순이다.

그러므로, 적당한 $n \geq k$ 에 대해 $(x, \tilde{\omega}_n o)_o \geq d(o, \tilde{\omega}_k o)$ 가 성립하는 경우는 $\tilde{a}_{i(1)}$ 의 선택지 중 기껏해야 하나밖에 해당하지 않는다. 비슷한 이유로, $\mathcal{E}_{Q_k}^{\kappa_1 k - 1}(\omega)$ 가 성립하게끔 하는 전체 최소 $304^{\kappa_1 k - 1}$ 개의 $\tilde{a}_{i(1)}, \dots, \tilde{a}_{i(\kappa_1 k - 1)}$ 의 선택지 중 이 경우에 해당하는 것은 기껏해야 하나밖에 없다. 따라서, 각 $\mathcal{E}_{Q_k}^{\kappa_1 k - 1}(\omega)$ 위에서의 조건부 확률은 $0.005^{\kappa_1 k - 1}$ 이하이고 $\kappa_2 = \kappa_1 \log 200$ and $K_2 = K_1 + 200$ 로 잡을 수 있다.

두번째 주장 또한 같은 연장선 위에 있다. 이번에는 $g_{6N\lfloor k/6N\rfloor+1}, g_{6N\lfloor k/6N\rfloor+2}, \dots, g_n$ 선택지를 고정하고 k 이전의 중추 시점을 구성하겠다. 즉, Subsection 5.1의 모델에서

$$w'_{\mathcal{N}(\lfloor k/6N\rfloor)} = \nu_{\vartheta(\mathcal{N}(\lfloor k/6N\rfloor))+1}^* \cdots \nu_{\lfloor k/6N\rfloor}^* g_{6N\lfloor k/6N\rfloor+1} \cdots g_n$$

로 잡는 변형을 취하는 것이다. 그래도 여전히 $\mathcal{N}(\lfloor k/6N\rfloor)$ 및 $|P_k|$ 에 대한 추산은 변하지 않는다. 다시 말해, $\mathbb{P}(|P_k| \leq \kappa_1 k | g_{k+1}, \dots, g_{(i+1)N-1}) \leq K_1 e^{-\kappa_1 k}$ 가 성립한다는 뜻이다. 이제 방금과 같이 $|P_k| \geq \kappa_1 k$ 상황에서 계산하여 결론을 이끌어낼 수 있다.

마지막 주장을 다루기 위해, $\mathcal{E}_{Q_k}^{\kappa_1 k-1}(\omega)$ 위에서 계속 논의를 진행하겠다. 이때 $\tilde{\omega} \in \mathcal{E}_{Q_k}^{\kappa_1 k-1}(\omega)$ 에 대한 $d(o, \tilde{\omega}_k o)$ 가 위로 한정되어 있음을 관찰하라. 이 한계를 M 이라고 두겠다.

$\check{g}_1, \dots, \check{g}_{k+1}$ 가 고정된 상황에서도, 거의 모든 $\check{\omega}_n$ 는 무한히 멀리 탈출하고 무수히 많은 궁극적인 중추를 가진다는 점을 상기하자. 따라서, 적당한 중추 시점 $\check{i}(m)$ 에서 $d(o, \check{w}_{\check{i}(m),0}^- o) \geq M + 2(F_0 + F_1) + 1$ 가 성립하는 자취들에만 한정하여 살펴 보겠다 — 이 과정에서 잃는 확률은 없다. 이때 $[o, \check{\omega}_n o]$ 가 결국에는 $[\check{w}_{\check{i}(m),2}^- o, \check{w}_{\check{i}(m),0}^- o]$ 에 의해 F_0 -목격된다는 점에 유의하라. (*)

이제 $(\check{\omega}_n o, \check{\omega}_n o)_o \geq d(o, \tilde{\omega}_k o)$ 가 어떤 충분히 큰 n 에 대해 성립하기 위한 $\tilde{a}_{i(1)}$ 선택지는 기껏해야 한 개밖에 없음을 보이겠다. 이를 위해, $\tilde{a}_{i(1)} = a, a'$ 가 각각 n, n' 에 대해 작동한다고 가정해 보자. 그러면 $[o, \check{\omega}_n o]$ 는 $[\check{w}_{\check{i}(1),2}^- o, \check{w}_{\check{i}(1),2}^- a^2 o]$ 에 의해 G_0 -목격되고 $[o, \check{\omega}_{n'} o]$ 는 $[\check{w}_{\check{i}(1),2}^- o, \check{w}_{\check{i}(1),2}^- a'^2 o]$ 에 의해 G_0 -목격된다. Lemma 3.10는 $(\check{\omega}_n o, \check{\omega}_{n'} o)_o \leq d(o, \check{w}_{\check{i}(1),2}^- o) + F_1$ 임을 암시한다. 이는 (*)가 암시하는 $(\check{\omega}_n o, \check{\omega}_{n'} o)_o \geq d(o, \check{w}_{\check{i}(m),0}^- o) - 2F_0$ 에 모순이다.

비슷한 방식으로, 가능한 $\tilde{a}_{i(1)}, \dots, \tilde{a}_{i(\kappa_1 k-1)}$ 조합이 기껏해야 한 개밖에 없음을 이끌어낼 수 있고 같은 결론이 따라 나온다. \square

X 가 측지적인 공간일 경우, 다음과 같은 더 강력한 결론을 얻는다. 확률 $K_2 e^{-\kappa_2 k}$ 이하인 사건 밖에서는,

$$\begin{aligned} (x, \omega_n o)_o &\leq d(o, \omega_{i(\kappa_1 k-1),0}^- o) \leq d(o, \omega_{i(\kappa_1 k-1),0}^+ o), \\ (o, x)_{\omega_n o} &\geq d(o, \omega_n o) - d(o, \omega_{i(\kappa_1 k-1),0}^+ o) \geq d(\omega_n o, \omega_{i(\kappa_1 k-1),0}^+ o) - 2F_0 \end{aligned}$$

가 성립한다. 이는 $[x, \omega_n o]$ 가 $[w_{i(\kappa_1 k-1),0}^+ o, w_{i(\kappa_1 k-1),2}^+ o]$ 에 의해서 G_0 -목격되었다는 것과,

$$d(o, [x, \omega_n o]) \leq d(o, w_{i(\kappa_1 k-1),0}^+ o) + G_0 + 6\delta \leq d(o, \omega_k o)$$

가 $n \geq k$ 에 대해 성립한다는 것을 암시한다. 비슷하게 $d(o, [\check{\omega}_n o, \omega_n o]) \leq d(o, \omega_k o)$ 도 충분히 큰 n 에 대해 성립한다.

이제 독립적인 랜덤한 자취들 사이 이탈 거리에 대한 두 배 지수 부등식을 증명할 것이다. 이는 $p = 2$ 에 대해서는 [MS20]에서 관찰된 바가 있는데, 자신의 Cayley 그래프에 작용하고 있는 쌍곡군 G 의 경우였다.

Proposition 5.6. 어떤 $p > 0$ 에 대해 μ 가 유한한 p -모멘트를 가진다고 하자. 그러면

$$\mathbb{E} \left[\limsup_n (\check{\omega}_n o, \omega_n o)_o^{2p} \right] < K$$

가 성립하는 $K > 0$ 이 존재한다. 만약 X 가 측지적이라면,

$$\mathbb{E} \left[\limsup_n d(o, [\check{\omega}_n o, \omega_n o])^{2p} \right] < K$$

또한 성립한다.

Proof. 나중에 나올 이유 때문에, $0 \leq q \leq p$ 를 추가로 잡겠다. 이제 $D(\check{\omega}_n, \omega_n) := (\check{\omega}_n o, \omega_n o)^{p+q}$ 혹은 $d(o, [\check{\omega}_n o, \omega_n o])^{p+q}$ 로 두고, $D_{p,q}(\check{\omega}_n, \omega_n) := d(o, \check{\omega}_n o)^p d(o, \omega_n o)^q$ 로 두자. 이제 주장할 것은,

$$f(\check{\omega}, \omega) := \sum_{k=0}^{\infty} |D_{p,q}(\check{\omega}_{k+1}, \omega_{k+1}) - D_{p,q}(\check{\omega}_k, \omega_k)| \mathbf{1}_{\limsup_n D(\check{\omega}_n, \omega_n) \geq D_{p,q}(\check{\omega}_{k+1}, \omega_{k+1})}$$

가 $\limsup_n D(\check{\omega}_n, \omega_n)$ 를 제한한다는 것이다.

만약 $D_{p,q}(\check{\omega}_i, \check{\omega}_i) < \limsup_n D(\check{\omega}_n, \omega_n) \leq D_{p,q}(\check{\omega}_{i+1}, \check{\omega}_{i+1})$ 가 i 에서 처음 일어날 경우,

$$\limsup_n D(\check{\omega}_n, \omega_n) \leq D_{p,q}(\check{\omega}_{i+1}, \check{\omega}_{i+1}) = \sum_{k=0}^i [D_{p,q}(\check{\omega}_{i+1}, \omega_{i+1}) - D_{p,q}(\check{\omega}_i, \omega_i)]$$

는 $f(\check{\omega}, \omega)$ 에 의해 한정된다. 만약 아니라면, $d(o, \omega_k o) < \limsup_n D(\check{\omega}_n, \omega_n)$ 가 모든 k 에 대해 성립하며 각 i 에 대해

$$D(\check{\omega}_i, \omega_i) \leq d(o, \check{\omega}_i o)^p d(o, \omega_i o)^q = \sum_{0 \leq k < i} [D_{p,q}(\check{\omega}_{k+1}, \omega_{k+1}) - D_{p,q}(\check{\omega}_k, \omega_k)]$$

는 $f(\check{\omega}, \omega)$ 에 의해 한정된다. $\limsup_n D(\check{\omega}_n) \leq \sup_i D(\check{\omega}_i, \omega_i)$ 이므로 주장한 내용이 따라 나온다.

이제 $t, s \geq 0$ 에 대해

$$(5.4) \quad |t^p - s^p| \leq \begin{cases} |t - s|^p & p \leq 1, \\ 2^p (|t - s|^p + s^{p-1}|t - s|) & p > 1. \end{cases}$$

가 성립함을 상기하자. 이는 $t_i, s_i \geq 0$ 에 대해

$$\begin{aligned}
(5.5) \quad |t_1^p t_2^q - s_1^p s_2^q| &= |t_1^p(t_2^q - s_2^q) + (t_1^p - s_1^p)s_2^q| \\
&\leq 2^{p+q} \left(|t_1 - s_1|^p + s_1^{p-n_p} |t_1 - s_1|^{n_p} + s_1^p \right) \left(|t_2 - s_2|^q + s_2^{q-n_q} |t_2 - s_2|^{n_q} \right) \\
&\quad + 2^p \left(|t_1 - s_1|^p + s_1^{p-n_p} |t_1 - s_1|^{n_p} \right) s_2^q. \\
&\quad \left(n_p = \begin{cases} p & 0 \leq p \leq 1 \\ 1 & p > 1 \end{cases}, \quad n_q = \begin{cases} q & 0 \leq q \leq 1 \\ 1 & q > 1 \end{cases} \right)
\end{aligned}$$

가 성립함을 의미한다.

부등식 5.5 덕분에, 이제 $0 \leq n_1 \leq p$, $0 \leq n_2 \leq q$, $n_1 + n_2 \geq \min(q, 1)$ 를 만족하는 (n_1, n_2) 조합 8개에 대한

$$\begin{aligned}
&f_{k;n_1,n_2}(\check{\omega}, \omega) \\
&:= d(o, \check{g}_{k+1})^{n_1} d(o, g_{k+1})^{n_2} d(o, \check{\omega}_k o)^{p-n_1} d(o, \omega_k o)^{q-n_2} \mathbf{1}_{\limsup_n D(\check{\omega}_n, \omega_n) \geq D_{p,q}(\check{\omega}_{k+1}, \omega_{k+1})}
\end{aligned}$$

의 기댓값만 통제하면 된다. $c = e^{\kappa_2/2p}$ 로 잡고 g_{k+1}, \check{g}_{k+1} 을 일단 고정하자.

이제

$$\begin{aligned}
Y &:= d(o, \check{\omega}_k o)^{p-n_1} d(o, \omega_k o)^{q-n_2} \mathbf{1}_{\limsup_n D(\check{\omega}_n, \omega_n) \geq D_{p,q}(\check{\omega}_{k+1}, \omega_{k+1})}, \\
Y_1 &:= d(o, \check{\omega}_k o)^{p-n_1} c^{k(q-n_2)} \mathbf{1}_{\limsup_n D(\check{\omega}_n, \omega_n) \geq d(o, \omega_k o)^{p+q}}, \\
Y_2 &:= c^{k(p-n_1)} d(o, \omega_k o)^{q-n_2} \mathbf{1}_{\limsup_n D(\check{\omega}_n, \omega_n) \geq d(o, \check{\omega}_k o)^{p+q}}, \\
Y_3 &:= c^{k(p+q-n_1-n_2)} \mathbf{1}_{\limsup_n D(\check{\omega}_n, \omega_n) \geq D_{p,q}(\check{\omega}_{k+1}, \omega_{k+1})}, \\
Y_4 &:= d(o, \check{\omega}_k o)^{p-n_1} d(o, \omega_k o)^{q-n_2} \mathbf{1}_{d(o, \check{\omega}_k o), d(o, \omega_k o) \geq c^k}.
\end{aligned}$$

에 대해 $Y \leq Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$ 가 성립한다는 사실을 관찰하자. 먼저 $d(o, \check{\omega}_k o), c^k \geq d(o, \omega_k o)$ 이면 $Y \leq Y_1$ 이다. 또한 $d(o, \omega_k o), c^k \geq d(o, \check{\omega}_k o)$ 이면 $Y \leq Y_2$ 이고, $d(o, \omega_k o), d(o, \check{\omega}_k o) \leq c^k$ 이면 $Y \leq Y_3$ 이다. 그 외의 경우 $d(o, \check{\omega}_k o), d(o, \omega_k o) \geq c^k$ 이고 따라서 $Y \leq Y_4$ 가 성립한다.

이제 각 $\mathbb{E}[Y_i | g_{k+1}, \check{g}_{k+1}]$ 을 어렵해 보자. g_{k+1}, \check{g}_{k+1} 에 이어 $\check{g}_1, \dots, \check{g}_k$ 까지 고정하고 $\check{\omega}$ 을 (k 단계 전에서) 방향 전환하기로 하자. Lemma 5.5는 이때

$$\mathbb{P}[\limsup_n D(\check{\omega}_n, \omega_n) \geq d(o, \omega_k o) | g_{k+1}, \check{g}_1, \dots, \check{g}_{k+1}] \leq K_2 e^{-\kappa_2 k}$$

임을 얘기해 주고, 이제 다양한 $\check{g}_1, \dots, \check{g}_k$ 값들을 넣어 $d(o, \check{\omega}_k o)^{p-n_1}$ 를 적분하면

$$\mathbb{E}[Y_1 | g_{k+1}, \check{g}_{k+1}] \leq K_2 c^{-2kp} \cdot c^{k(q-n_2)} \cdot \mathbb{E}[d(o, \check{\omega}_k o)^{p-n_1}] \leq K_2 c^{-k(2p-q+n_2)} k^{p-n_1+1} \mathbb{E}_\mu[d(o, go)^{p-n_1}]$$

임을 얻는다. 비슷하게,

$$\mathbb{E}[Y_2 | g_{k+1}, \check{g}_{k+1}] \leq K_2 c^{-2kp} \cdot c^{k(p-n_1)} \cdot \mathbb{E}[d(o, \omega_k o)^{q-n_2}] \leq K_2 c^{-k(p+n_1)} k^{q-n_2+1} \mathbb{E}_\mu[d(o, go)^{q-n_2}]$$

임을 알 수 있다. Y_3 를 위해서는 경우를 둘로 나눠 Lemma 5.5를 사용하면

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_3 | g_{k+1}, \check{g}_{k+1}] &\leq c^{k(p+q-n_1-n_2)} \cdot \left[\begin{aligned} &\mathbb{P}[\limsup_n D(\check{\omega}_n, \omega_n) > d(o, \omega_k o) | g_{k+1}, \check{g}_{k+1}] + \\ &\mathbb{P}[\limsup_n D(\check{\omega}_n, \omega_n) > d(o, \check{\omega}_k o) | g_{k+1}, \check{g}_{k+1}] \end{aligned} \right] \\ &\leq c^{k(p+q-n_1-n_2)} \cdot 2K_2 e^{-\kappa_2 k} = 2K_2 c^{-k(p-q+n_1+n_2)} \end{aligned}$$

임을 얻는다. 마지막으로,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_4] &\leq \mathbb{E}[d(o, \check{\omega}_k o)^p \cdot d(o, \check{\omega}_k o)^{-n_1} 1_{d(o, \check{\omega}_k o) > c^k}] \cdot \mathbb{E}[d(o, \omega_k o)^p \cdot d(o, \omega_k o)^{q-p-n_2} 1_{d(o, \omega_k o) > c^k}] \\ &\leq \mathbb{E}[d(o, \check{\omega}_k o)^p] \mathbb{E}[d(o, \omega_k o)^p] \cdot c^{-k(p-q+n_1+n_2)} \leq k^{p+q+2} (\mathbb{E}_\mu[d(o, go)^p])^2 \cdot c^{-k(p-q+n_1+n_2)} \end{aligned}$$

임을 관찰할 수 있다.

이 상한을 가지고, $d(o, g_{k+1}o)^{n_1} d(o, \check{g}_{k+1}o)^{n_2}$ 를 곱해 적분하여

$$\mathbb{E}[f_{k;n_1,n_2}] \leq (5K_2 + 1) (1 + \mathbb{E}_\mu[d(o, go)^p])^4 c^{-k[p-q+\min(q,1)]} k^{p+q+2}$$

를 얻을 수 있다. 이는 $q = p$ 인 경우 더하면 유한한 값을 가지므로 원하던 결론이 따라 나온다. \square

Remark 5.7. 이와 비슷한 결과로, 고정된 무한대 경계점과 랜덤한 자취 사이 이탈 거리에 대한 부등식을 [BQ16, Proposition 5.1]에서 찾을 수 있다. Lemma 5.5를 이용해, 다음을 증명할 수 있다:

Proposition 5.8 (cf. [BQ16, Proposition 5.1]). 어떤 $p > 0$ 에 대해 μ 가 유한한 p -모멘트를 가진다고 하자. 그러면 모든 $x \in X \cup \partial X$ 및 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 에 대해

$$\mathbb{E}[(x, \omega_m o)_o^p], \quad \mathbb{E} \left[\limsup_n (x, \omega_n o)_o^p \right] < K$$

가 성립하는 $K > 0$ 가 존재한다. 만약 X 가 측지적이라면,

$$\mathbb{E}[d(o, [x, \omega_m o])^p], \quad \mathbb{E} \left[\limsup_n d(o, [x, \omega_n o])^p \right] < K$$

또한 성립한다.

*Benoist*와 *Quint*는 Lemma 5.5를 유도하기 위해 G 의 작용이 콤팩트-맞춤이기를 요구했는데, 여기서는 그렇지 않음을 유의하라.

이제 $m, m' \in \mathbb{N}$ 에 대한 $(\check{\omega}_m o, \omega_{m'} o)_o$ 의 $2p$ -모멘트를 비슷하게 어렵하려고 한다. 이 상한값은 $m = m'$ 일 때는 일정하다는 것을 눈여겨 보라. 비록 서로 다른 m 과 m' 들까지 고려하면 상한값은 일정하지 않으나, 이는 Section 7에서 중첩 로그 정리를 증명하기에는 충분할 것이다.

Proposition 5.9. 어떤 $p > 0$ 에 대해 μ 가 유한한 p -모멘트를 가진다고 하고 $q \leq p$ 가 0 이상인 정수라고 하자. 그러면 모든 $0 \leq m \leq m'$ 에 대해 각각

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [(\check{\omega}_m o, \omega_{m'} o)_o^{p+q}] &< K + K e^{-m/K} (m' - m)^q, \\ \mathbb{E} [d(o, [\check{\omega}_m o, \omega_{m'} o])_o^{p+q}] &< K + K e^{-m/K} (m' - m)^q\end{aligned}$$

가 성립하게 하는 $K > 0$ 가 존재한다.

Proof. Proposition 5.6 증명에서의 $\limsup_n D(\check{\omega}_n, \omega_n)$ 를 $D(\check{\omega}_m, \omega_{m'}) := (\check{\omega}_m o, \omega_{m'} o)^{p+q}$ 혹은 $d(o, [\check{\omega}_m o, \omega_{m'} o])^{p+q}$ 로 바꾸겠다. 그리고

$$\begin{aligned}f(\check{\omega}, \omega) &:= \sum_{k=0}^{m-1} |D_{p,q}(\check{\omega}_{k+1}, \omega_{k+1}) - D_{p,q}(\check{\omega}_k, \omega_k)| 1_{D(\check{\omega}_m, \omega_{m'}) \geq D_{p,q}(\check{\omega}_k, \omega_k)}, \\ g(\check{\omega}, \omega) &:= |D_{p,q}(\check{\omega}_m, \omega_{m'}) - D_{p,q}(\check{\omega}_m, \omega_m)| 1_{D(\check{\omega}_m, \omega_{m'}) \geq D_{p,q}(\check{\omega}_m, \omega_m)}\end{aligned}$$

를 정의하면 $f(\check{\omega}, \omega) + g(\check{\omega}, \omega) \geq D(\check{\omega}_m, \omega_{m'})$ 임을 관찰할 수 있다. 이제 Proposition 5.6에서와 같이 Y 와 Y_i 를 구성함으로써 $\mathbb{E} f(\check{\omega}, \omega)$ 에 대한 일정한 상한값을 계산할 수 있다. 여기서 쓰이는 사실은 각 $k \leq m-1$ 에 대해

$$\mathbb{P}[D(\check{\omega}_m, \omega_{m'}) \geq d(o, \check{\omega}_k o) | g_1, \dots, g_{k+1}, \check{g}_{k+1}] \leq K_2 e^{-\kappa_2 k}$$

(및 이것을 대칭한 버전)인데, 이는 여기서는 Lemma 5.5의 첫번째 혹은 두번째 부분으로부터 따라 나온다.

한편, $g(\check{\omega}, \omega)$ 는 $n_2 = 1, q$ 에 대한

$$d(\omega_m o, \omega_{m'} o)^{n_2} d(o, \check{\omega}_m o)^p d(o, \omega_m o)^{q-n_2} 1_{D(\check{\omega}_m, \omega_{m'}) \geq D_{p,q}(\check{\omega}_m, \omega_m)}$$

의 선형 결합에 의해 한정된다. 이전 계산들에 의해,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[d(o, \check{\omega}_m o)^p d(o, \omega_m o)^{q-n_2} 1_{D(\check{\omega}_m, \omega_{m'}) \geq D_{p,q}(\check{\omega}_m, \omega_m)} | g_{m+1}, \dots, g_{m'}] \\ &\leq K_2 c^{-m(2p-q+n_2)} m^{p+1} \mathbb{E}_\mu[d(o, go)^p] + K_2 c^{-mp} m^{q-n_2} \mathbb{E}_\mu[d(o, go)^{q-n_2}] \\ &\quad + 2K_2 c^{-m(p-q+n_2)} + m^{p+q+1} c^{-m(p-q+n_2)} (\mathbb{E}_\mu[d(o, go)^p])^2\end{aligned}$$

임을 얻는다. 여기서 쓰이는 사실은

$$\mathbb{P}[(\check{\omega}_m, \omega_{m'} o) \geq d(o, \omega_m o) | g_{m+1}, \dots, g_{m'}, \check{g}_1, \dots, \check{g}_m] \leq K_2 e^{-\kappa_2 k}$$

및

$$\mathbb{P}[(\check{\omega}_m, \omega_{m'} o) \geq d(o, \check{\omega}_m o) | g_1, \dots, g_{m'}] \leq K_2 e^{-\kappa_2 k}$$

인데, 이는 Lemma 5.5의 두번째 항목에 의해 성립한다. 이제 $d(\omega_m o, \omega_{m'} o)^{n_2} \leq [\sum_{k=m+1}^{m'} d(o, g_k o)]^{n_2}$ 를 곱해 적분하면

$$\mathbb{E} g(\check{\omega}, \omega) \leq (5K_2 + 1) (1 + \mathbb{E}_\mu[d(o, go)^p])^3 c^{-m[p-q+\min(q,1)]} m^{p+q+1} \cdot (m' - m)^{n_2}$$

임을 얻을 수 있다(여기서 $n_2 = 1, q$ 가 정수라는 사실을 이용한다). $p > 0$ 이고 $0 \leq q \leq p$ 이므로, $p - q + \min(q, 1)$ 가 양수이고 원하는 추산이 따라 나온다. \square

지수 모멘트가 유한한 측도들에 대해서도 비슷한 논법을 생각할 수 있다. 이 상황에서 Proposition 5.9과 유사한 버전 또한 만들 수 있지만, 일단 Theorem D에 쓰이는 Proposition 5.6의 유사 버전을 얘기하기로 하자.

Proposition 5.10. 어떤 $c > 0$ 에 대해 $\mathbb{E}_\mu[e^{cd(o,go)}] < \infty$ 라고 가정하자. 그러면

$$\mathbb{E} \left[\limsup_n e^{K(\tilde{\omega}_n o, \omega_n o)} \right], \quad \mathbb{E} \left[\limsup_n e^{Kd(o, [\tilde{\omega}_n o, \omega_n o])} \right] < K$$

이 성립하게 하는 $K > 0$ 이 존재한다.

Proof. $M = 4 \max(1, \log \mathbb{E}_\mu[e^{cd(o,go)}] + 1)/c$ 및 $K = \min(c, \kappa_2/2M)$ 를 잡자. 이때 $KM \leq \kappa_2/2$ and $M(c - K/2) \geq Mc/2 \geq 2 \log \mathbb{E}_\mu[e^{cd(o,go)}] + 1$ 임을 유의하라.

아까와 마찬가지로, 지금 고려해야 하는 확률변수는

$$(5.6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} e^{K[d(o, \omega_{k+1} o) + d(o, \tilde{\omega}_{k+1} o)]/2} \mathbf{1}_{\limsup_n D(\tilde{\omega}_n, \omega_n) > \frac{d(o, \omega_k o) + d(o, \tilde{\omega}_k o)}{2}}$$

에 의해 한정된다. 그러므로,

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{Kd(o, g_{k+1} o)/2} e^{Kd(o, \check{g}_{k+1} o)/2} e^{Kd(o, \omega_k o)/2} e^{Kd(o, \tilde{\omega}_k o)/2} \mathbf{1}_{\limsup_n D(\tilde{\omega}_n, \omega_n) > \frac{d(o, \omega_k o) + d(o, \tilde{\omega}_k o)}{2}}$$

의 기댓값을 통제할 수 있으면 된다.

g_{k+1}, \check{g}_{k+1} 를 고정하고 $E_k := \{d(o, \omega_k o) \geq Mk\}$ 를 생각하겠다. 그러면

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{Kd(o, \tilde{\omega}_k o)/2} e^{Kd(o, \omega_k o)/2} \mathbf{1}_{E_k}] &\leq \mathbb{E}[e^{cd(o, \tilde{\omega}_k o)} e^{cd(o, \omega_k o)} e^{(K/2-c)d(o, \omega_k o)} \mathbf{1}_{E_k}] \\ &\leq \mathbb{E}[e^{c \sum_{i=1}^k d(o, \check{g}_i o)} e^{c \sum_{i=1}^k d(o, g_i o)}] e^{M(K/2-c)k} \\ &\leq \mathbb{E}_\mu[e^{cd(o, go)}]^{2k} e^{M(K/2-c)k} \leq e^{-k} \end{aligned}$$

이 성립한다. 비슷한 추산이 $\check{E}_k := \{d(o, \tilde{\omega}_k o) \geq Mk\}$ 에서도 가능하다. ($E_k \cup \check{E}_k$)^c에서는

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{Kd(o, \tilde{\omega}_k o)/2} e^{Kd(o, \omega_k o)/2} \mathbf{1}_{\limsup_n D(\tilde{\omega}_n, \omega_n) \geq d(o, \omega_k o), E_k^c \cap \check{E}_k^c}] &\leq e^{KMk} K_2 e^{-\kappa_2 k}, \\ \mathbb{E}[e^{Kd(o, \tilde{\omega}_k o)/2} e^{Kd(o, \omega_k o)/2} \mathbf{1}_{\limsup_n D(\tilde{\omega}_n, \omega_n) \geq d(o, \tilde{\omega}_k o), E_k^c \cap \check{E}_k^c}] &\leq e^{KMk} K_2 e^{-\kappa_2 k} \end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

전체적으로, 급수의 k -번째 항 기댓값은 $2K_2 e^{-\kappa_2 k/2} + 2e^{-k}$ 로 한정할 수 있는데, 이 상한은 g_{k+1}, \check{g}_{k+1} 선택지에 관계없이 일정하다. 이제 $e^{Kd(o, g_{k+1} o)/2} \leq e^{cd(o, g_{k+1} o)}$ 및 $e^{Kd(o, \check{g}_{k+1} o)/2} \leq e^{cd(o, \check{g}_{k+1} o)}$ 를 곱해 g_{k+1} 및 \check{g}_{k+1} 에 대해 적분하여 k 에 대해 더하면 원하는 한계를 얻는다. \square

이제 Theorem D를 증명할 준비가 되었다.

Proof. 무수히 많은 정방향/역방향 중추 시점 $\{i(1), i(2), \dots\}, \{\check{i}(1), \check{i}(2), \dots\}$ 을 가지는 샘플 자취만을 중점적으로 보겠다. 이때 Proposition 5.2에서와 같이 $x_0 = o$ and $(x_{2l-1}, x_{2l}) = (y_{i(l),0}^-, y_{i(l),0}^+)$ 로 정의하고 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots$ 를 이어 붙여 $\Gamma(\omega)$ 라는 자취로 잇겠다.

여기서 $\Gamma(\omega)$ 가 $(1 + \frac{8F_0}{L_0}, 2F_0 + 2D_3)$ -quasi-geodesic임을 살펴 보겠다. 이를 위해 $z \in [x_{i-1}, x_i]$ 및 $z' \in [x_j, x_{j+1}]$ 을 생각하자. 일반성을 잃지 않고 $i-1 \leq j$ 라고 가정하겠다. $i-1 = j$ 인 경우, z 와 z' 사이 $\Gamma(\omega)$ 부분은 측지선이므로 더 얘기할 것이 없다.

$i = j$ 인 경우,

$$\begin{aligned} (z, z')_{x_i} &= \frac{1}{2}[d(z, x_i) + d(x_i, z') - d(z, z')] \\ &= \frac{1}{2}[d(x_{i-1}, x_i) + d(x_i, x_{i+1}) - (d(x_{i-1}, z) + d(z, z') + d(z', x_{i+1}))] \\ &\leq \frac{1}{2}[d(x_{i-1}, x_i) + d(x_i, x_{i+1}) - d(x_{i-1}, x_{i+1})] = (x_{i-1}, x_{i+1})_{x_i} \leq F_0 \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 따라서, z 와 z' 사이 $\Gamma(\omega)$ 부분의 길이 $d(z, x_i) + d(x_i, z')$ 는 $d(z, z') + 2F_0$ 에 의해 한정된다.

$i < j$ 인 경우, 마찬가지로 $(z, x_j)_{x_i} \leq (x_{i-1}, x_j)_{x_i} \leq F_0$ 및 $(z, x_{j+1})_{x_i} \leq (x_{i-1}, x_{j+1})_{x_i} \leq F_0$ 임을 알 수 있다. $(x_i, x_{j+1})_{x_j} \leq F_0$ 라는 사실과 더불어 생각하면, $[z, x_{j+1}]$ 가 $([z, x_i], [x_j, x_{j+1}])$ 에 의해 D_3 -목격된다는 것과 $(z, z')_{x_j} \leq (z, x_{j+1})_{x_j} \leq D_3$ 임을 알 수 있다. 또 $k = i+1, \dots, j-1$ 에 대해 $(x_i, x_{k+1})_{x_k} < F_0$ 임을 알 수 있다. 이는

$$\left| \left[d(z, x_i) + \sum_{k=i}^{j-1} d(x_k, x_{k+1}) + d(x_j, z') \right] - d(z, z') \right| \leq 2F_0(j-i) + 2D_3$$

임을 의미한다. 각 k 에 대해 $d(x_k, x_{k+1}) \geq \frac{L_0}{2}$ 이므로, $d(z, z') \geq (\frac{L_0}{2} - 2F_0)(j-i) - 2D_3 \geq \frac{L_0}{4}(j-i) - L_0/8$ 임을 알 수 있고 이는

$$\begin{aligned} d(z, x_i) + \sum_{k=i}^{j-1} d(x_k, x_{k+1}) + d(x_j, z') &\leq d(z, z') + 2F_0(j-i) + 2D_3 \\ &\leq (1 + 8F_0/L_0) d(z, z') + F_0 + 2D_3 \end{aligned}$$

임을 의미한다.

이제 $\mathbb{E}_\mu[d(o, go)^p] < +\infty$ 혹은 어떤 $c > 0$ 에 대해 $\mathbb{E}_\mu[e^{cd(o, go)}] < +\infty$ 라고 가정하자. 첫번째 경우 $f(k) = k^{1/2p}$ 및 임의의 $C > 0$ 를 생각하고, 두번째 경우에는 $f(k) = \log k$ 및 Proposition 5.10에서 얻은 K 를 활용한 $C = 1/K$ 를 생각하자. 여기서 목표는 거의 모든 ω 에 대해 $d(\omega_k o, \Gamma(\omega)) \leq 3Cf(k)$ 가

궁극적으로 성립함을 증명하는 것이다. 이제

$$E_k := \{(\tilde{\omega}, \omega) : \limsup_n d(\omega_k o, [\omega_{k-n} o, \omega_{k+n} o]) \leq Cf(k)\}$$

를 정의하자. 각 k 에 대해 $\limsup_n d(\omega_k o, [\omega_{k-n} o, \omega_{k+n} o])$ 가 $Y = \limsup_n d(o, [\tilde{\omega}_n o, \omega_n o])$ 와 같은 분포를 가짐을 기억하라. 따라서, Proposition 5.8과 5.6는

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_k^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq Cf(k)) < \infty$$

를 암시하고, Borel-Cantelli 보조정리에 의해 $\mathbb{P}[\liminf_k E_k] = 1$ 이다.

위 논지와 Lemma 5.3에 의해,

- (1) Lemma 5.3에서와 같은 m 이 $(\tilde{\omega}, \omega)$ 에 존재하고,
- (2) 충분히 큰 k 에 대해 $\omega \in E_k$

라고 가정할 수 있다. 이제 충분히 큰 k 에 대해 $\omega \in E_k$, $|Q_k(\omega)| > m$ 및 $Cf(k) \geq F_0 + F_2$ 가 성립한다고 할 수 있는데, 그런 k 를 하나 고정하자. 중추 지점이 무한히 멀리 탈출하므로,

$$d(o, y_{i(M),0}^+) \geq 2Cf(k) + d(o, \omega_k o) + F_0 + F_2 + 1$$

가 성립하는 M 이 존재한다. 마지막으로,

- (1) $|\check{Q}_{n-k}(\tilde{\omega})| \geq m$ and $|Q_{n+k}(\omega)| \geq M$,
- (2) $d([\omega_{k-n} o, \omega_{k+n} o], \omega_k o) \leq 2Cf(k)$

가 성립하는 n 이 존재한다.

먼저 Lemma 5.3에 의해 각 $x_{2m}, x_{2m+1}, \dots, x_{2M}$ 가 $[\omega_{k-n} o, \omega_{k+n} o]$ 에 F_0 -가깝다는 것을 관찰하자. $\omega_{k-n} o, \omega_{k+n} o, x_i$ 가 ϵ -꺾으므로, $[\omega_{k-n} o, \omega_{k+n} o]$ 와

$$\Gamma' := [\omega_{k-n} o, x_{2m}] \cup [x_{2m}, x_{2m+1}] \cup \dots \cup [x_{2M-1}, x_{2M}] \cup [x_{2M}, \omega_{k+n} o]$$

는 Hausdorff 거리가 F_2 이내에 있다. 그러므로 $d(\omega_k o, \Gamma') \leq 2Cf(k) + F_2$ 이다.

여기서 Lemma 5.3이므로 $(\omega_{k-n} o, \omega_k o)_{x_{2m}} < F_0$ 이고

$$d(\omega_k o, [\omega_{k-n} o, x_{2m}]) \geq (\omega_{k-n} o, x_{2m})_{\omega_k o} \geq d(x_{2m}, \omega_k o) - F_0$$

가 성립한다. 한편, $i(M) \in P_{k+n}(\omega)$ 이므로

$$\begin{aligned} d(\omega_k o, [x_{2M}, \omega_{k+n} o]) &\geq (x_{2M}, \omega_{k+n} o)_{\omega_k o} \\ &\geq (x_{2M}, \omega_{k+n} o)_o - d(o, \omega_k o) \\ &= d(o, x_{2M}) - (o, \omega_{k+n} o)_{x_{2M}} - d(o, \omega_k o) \\ &\geq 2Cf(k) + F_2 + 1 \end{aligned}$$

이다. 이는 $d(\omega_k o, \Gamma')$ 가 $\omega_k o$ 와 $[x_{2M}, \omega_{k+n} o]$ 사이에서 이루어지는 것이 아니라는 뜻이다. 따라서

$$\begin{aligned} d(\omega_k o, \Gamma) &\leq d(\omega_k o, [\omega_{k-n} o, x_{2m}] \cup [x_{2m}, x_{2m+1}] \cup \dots \cup [x_{2M-1}, x_{2M}]) + F_0 \\ &\leq 2Cf(k) + F_0 + F_2 \leq 3Cf(k) \end{aligned}$$

가 성립한다. 즉, $d(\omega_k o, \Gamma) \leq 3Cf(k)$ 가 결국에 성립하고 원하던 결론이 따라 나온다.

이제 X 가 적절하다고 추가로 가정하겠다. Corollary 5.4와 같이, 반-무한한 측지선 Γ_0 로 수렴해 가는 $[o, \omega_n o]$ 의 부분열 $[o, \omega_{n_i} o]$ 이 존재한다. 이제 Γ_0 과 Γ 가 한정된 Hausdorff 거리를 가진다는 것만 증명하면 된다. 각 x_j 는 $[o, \omega_n o]$ 에 결국 F_0 -가깝기에, Γ_0 도 $d(x_j, x'_j) < F_0$ 인 x'_j 를 가진다. 확실하게 하기 위해, $x'_0 = o = x_0$ 로 잡자. 그러면 $[x_j, x_{j+1}]$ and $[x'_j, x'_{j+1}]$ 은 Theorem 2.12에 의해 F_2 -바짝 붙어가며 $\Gamma = \cup_{j \geq 0} [x_j, x_{j+1}]$ 와 $\Gamma_0 = \cup_{j \geq 0} [x'_j, x'_{j+1}]$ 도 Hausdorff 거리 F_2 안에 부터 있다고 얘기할 수 있다. \square

6. 중심극한정리

이 절에서는 Subsection 5.1에서 고른 모델의 변형 두 개를 생각해 $d(o, \omega_n o)$ 를 위한 중심극한정리 및 $d(o, \omega_n o)$, $\tau(\omega_n)$ 를 위한 중심극한정리의 역을 증명하겠다. 여기서 $\tau(\omega_n)$ 을 위한 중심극한정리는 Theorem B로부터 따라 나온다는 점에 유의하라.

6.1. Converse of central limit theorems. 이 항 내내 $\mathbb{E}_\mu[d(o, go)^2] = +\infty$ 임을 가정하겠다. 또 $K > 0$ 로 두자.

각 $g \in G$ 마다 $(o, ago)_{ao} = (go, a^{-1}o)_o \leq C_0$ 가 성립하게 하는 $a \in S_0$ 가 존재한다. 이 선택지에 대해, $(o, agbo)_{ago} = (g^{-1}a^{-1}o, bo)_o \leq C_0$ 가 성립하게 하는 $b \in S_0$ 가 존재한다. 이 경우 $g \in A_{a,b}$ 라고 얘기하도록 하겠다. 그러면 $\cup_{a,b \in S_0} A_{a,b} = G$ 이므로,

$$\sum_{a,b \in S_0} \mathbb{E}_\mu[d(o, go)^2 1_{g \in A_{a,b}}] \geq \mathbb{E}_\mu[d(o, go)^2] = +\infty$$

임을 알 수 있다. 따라서 $\mathbb{E}_\mu[d(o, go)^2 1_{g \in A_{a,b}}] = +\infty$ 인 $a, b \in S_0$ 가 존재한다. 이제 크기 305짜리 $S_0 \setminus \{a, b\}$ 의 부분집합 S_0 를 하나 잡고, μ 를 $A_{a,b}$ 에 한정된 측도 $\mu_{a,b}$ 를 생각하겠다. 다시 말해,

$$\mu_{a,b}(g) = \begin{cases} \mu(g)/\mu(A_{a,b}) & g \in A_{a,b} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

로 정의하겠다는 것이다. $d(o, ao), d(o, bo) > 2C_0$ 이므로, 각 $g \in A_{a,b}$ 에 대해 $d(o, agbo) \geq d(o, go)$ 임을 알 수 있다. 따라서

$$\mathbb{E}_{\mu_{a,b}}[d(o, agbo)^2] \geq \mu(A_{a,b})^{-1} \mathbb{E}_\mu[d(o, go)^2 1_{g \in A_{a,b}}] = +\infty$$

가 성립한다. 이와 더불어 Subsection 5.1에서와 비슷하게 $\mu_{S^{(2)}}$, $1_{\{a\}}$ and $1_{\{b\}}$ 를 정의하겠다.

이제 적당한 측도 ν 및 $0 < \alpha < 1$ 에 대해

$$\mu^{6N+1} = \alpha(\eta := \mu_{S^{(2)}} \times 1_{\{a\}} \times \mu_{a,b} \times 1_{\{b\}} \times \mu_{S^{(2)}}) + (1 - \alpha)\nu$$

가 성립함을 관찰하자. Subsection 2.3에서와 같이 확률변수 $\rho_i, \nu_i, \eta_i, \gamma_i, \mathcal{N}(k), \vartheta(i)$ 를 정의하겠다. 또한 α_i (같은하여, β_i)를 η_i 의 첫(같은하여, 마지막) 성분 N 개의 곱으로 정의하고, ξ_i 를 $(3N + 1)$ -번째 중간 성분으로 정의하겠다. 그러면 $\{\rho_i, \alpha_i, \beta_i, \xi_i, \nu_i\}$ 은 모두 독립적이게 된다.

이제 Equation 6.1과 비슷한 세팅에서 논의를 진행하겠다; $k = \lfloor n/6N \rfloor$, $\gamma' = g_{6Nk+1} \cdots g_n$ 로 두면

(6.1)

$$\omega_n = w_0 \cdot a_1^2 \cdot (a\xi_{\vartheta(1)}b) \cdot b_1^2 \cdot w_1 \cdot a_2^2 \cdot (a\xi_{\vartheta(2)}b) \cdot b_2^2 \cdots a_{\mathcal{N}(k)}^2 \cdot (a\xi_{\vartheta(\mathcal{N}(k))}b) \cdot b_{\mathcal{N}(k)}^2 \cdot w'_{\mathcal{N}(k)}$$

가 성립하는데, 여기서 $w_i = \nu_{\vartheta(i)+1} \cdots \nu_{\vartheta(i+1)-1}$, $a_i = \alpha_{\vartheta(i)}$, $b_i = \beta_{\vartheta(i)}$ 및 $w'_{\mathcal{N}(k)} = \nu_{t(\mathcal{N}(k))+1} \cdots \nu_k \gamma'$ 로 둔 것이다.

Proposition 5.1에서와 같이, 기껏해야 확률이 $e^{-\kappa_1 n}$ 이하인 사건을 제외하면 $|P_n| > \kappa_1 n$ 가 성립한다. 또한, $A_{a,b}$ 에 걸린 조건 및 Lemma 3.7 때문에 $[o, a\xi_i b o]$ 는 $([o, a o], [a\xi_i o, a\xi_i b o])$ 에 의해 D_0 -목격된다. 그러므로 Proposition 5.2의 결론이 여기서도 성립한다: $x_0 = o$, $x_{2|P_n(s)|+1} = \omega_n o$ 및 $l = 1, \dots, |P_n(s)|$ 에 대해 $(x_{2l-1}, x_{2l}) = (y_{i(l),0}^-, y_{i(l),0}^+)$ 로 두면 각 $i \leq j \leq k$ 에 대해 $(x_i, x_k)_{x_j} \leq 2F_0$ 가 성립한다.

이제 Theorem C을 증명할 준비가 되었다.

Theorem C의 증명 $\kappa_1 n_m > 2^m$ 및 $\lim_m \kappa_1 n_m / 2^m = 1$ 인 수열 $(n_m)_{m>0}$ 를 고정하자. 이제 Ω 와 그 복제본 $\dot{\Omega}$ 의 곱공간 $\Omega \times \dot{\Omega}$ 에서 논의를 진행할 것이다. 다시 말해, $(\omega, \dot{\omega}) \in \Omega \times \dot{\Omega}$ 에 대한, ω 에만 의존하는 확률변수 $(\rho_i, \eta_i, \alpha_i, \beta_i, \dots)$ 와 함께, $\dot{\omega}$ 에만 의존하는 i.i.d. $(\dot{\rho}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i, \dots)$ 를 고려하겠다는 것이다. 이제 $\frac{1}{\sqrt{n}}[d(o, \omega_n o) - d(o, \dot{\omega}_n o)]$ 의 분포를 조사해 보겠다.

$\omega_0 \in \Omega_0 := \{\omega : |P_{n_m}(\omega)| \geq 2^m\}$ 라 가정하고 그 첫 2^m 개 중추 시점을 i_1, \dots, i_{2^m} 라고 두자. 이제 ω_0 의 동치류를

$$\mathcal{E}(\omega_0) = \left\{ \omega : \begin{array}{l} (\rho_i, \nu_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma')(\omega) = (\rho_i, \nu_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma')(\omega_0), \\ \xi_i(\omega) = \xi_i(\omega_0) \text{ unless } i = \vartheta(i_1), \dots, \vartheta(i_{2^m}) \end{array} \right\}$$

라고 선언하겠다($\vartheta(k)$ 들의 값은 $\{\rho_i(\omega)\}$ 에만 의존한다는 것을 유의하라). 이 조건은 Lemma 4.9에 의해서 동치 관계가 된다 — $\omega \in \mathcal{E}(\omega_0)$ 는 i_1, \dots, i_{2^m} 를 첫 2^m 개 중추 시점으로 가진다. 다음 값들 또한 $\mathcal{E}(\omega_0)$ 전체에 걸쳐 일정하다:

$$d(x_0(\omega), x_1(\omega)), \dots, d(x_{2^{m+1}-2}(\omega), x_{2^{m+1}-1}(\omega)), d(x_{2^{m+1}}(\omega), \omega_{n_m} o).$$

이제 각 $l = 0, \dots, m$ 에 대해 이분적 Gromov 내적들

$$(x_{2^l \cdot 0}, x_{2^l \cdot 2})_{x_{2^l \cdot 1}}, (x_{2^l \cdot 2}, x_{2^l \cdot 4})_{x_{2^l \cdot 3}}, \dots, (x_{2^l \cdot (2^{m+1-l} - 2)}, x_{2^l \cdot 2^{m+1-l}})_{x_{2^l \cdot (2^{m+1-l} - 1)}}$$

을 고려하겠다. 각 $\mathcal{E}(\omega_0)$ 에 한정해 살펴 보면, 이들은 각각 $\xi_{\vartheta(i_1)}, \dots, \xi_{\vartheta(i_{2^m})}$ 의 값에 의존하는, F_0 로 한정된 독립적인 확률변수 2^{m-l} 개이다. 그러니 그 합 Y_l 는 $\text{Var}(Y_l | \mathcal{E}(\omega_0)) \leq 2^{m-l} \cdot F_0^2$ 를 만족하고, Chebyshev 부등식에 의해

$$\mathbb{P} \left\{ |Y_l - \mathbb{E}[Y_l | \mathcal{E}(\omega_0)]| \geq 100F_0 \cdot 2^{(m-0.5l)/2} \mid \mathcal{E}(\omega_0) \right\} \leq \frac{1}{10^4 \cdot 2^{l/2}}$$

이다. 이를 모두 더하면 확률이 최대 1/2000인 사건을 제외하고서는

$$(6.2) \quad \sum_{l=0}^m |Y_l - \mathbb{E}[Y_l | \mathcal{E}(\omega_0)]| \leq 800F_0 \cdot 2^{m/2}$$

가 성립함을 알 수 있다. (*)

이와 같은 작업을 $\dot{\Omega}$ 에 대해서도 동일하게 하겠다. 이제 $\Omega_0, \dot{\Omega}_0$ 위에서의 동치류들의 순서쌍 $\mathcal{E} \times \dot{\mathcal{E}}$ 중

$$(6.3) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2^m-1} d(x_{2i}, x_{2i+1}) + d(x_{2^{m+1}}, \omega_{n_m} o) - 2 \sum_{l=0}^m \mathbb{E}[Y_l | \mathcal{E}] \\ & \geq \sum_{i=0}^{2^m-1} d(\dot{x}_{2i}, \dot{x}_{2i+1}) + d(\dot{x}_{2^{m+1}}, \dot{\omega}_{n_m} o) - 2 \sum_{l=0}^m \mathbb{E}[\dot{Y}_l | \dot{\mathcal{E}}] \end{aligned}$$

이 성립하는 순서쌍들의 집합을 \mathcal{E} 로 나타내자. 여기서 측도를 보존하는 대칭 변환 $\omega \leftrightarrow \dot{\omega}$ 를 적용했을 때 부등식 6.3가 역전된다는 사실을 유의하라. 이는 $\mathbb{P}(\bigcup \mathcal{E}) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}(\Omega_0 \times \dot{\Omega}_0)$ 임을 의미한다.

이제 $\mathbb{E}[d(o, a\xi bo)^2] = +\infty$ 라는 사실을 이용하겠다. 중심극한정리의 역의 한 증명에 따르면 충분히 큰 m 에 대해 다음이 성립한다. 첫 2^m 개 중추 시점의 각각 $\{i_1, \dots, i_{2^m}\}$ 및 $\{\dot{i}_1, \dots, \dot{i}_{2^m}\}$ 인 동치류 쌍 $\mathcal{E}, \dot{\mathcal{E}}$ 마다, $\mathcal{E} \times \dot{\mathcal{E}}$ 에서

$$(6.4) \quad \sum_{j=1}^{2^m} d(o, a\xi_{\vartheta(i_j)} bo) \geq \sum_{j=1}^{2^m} d(o, a\xi_{\vartheta(\dot{i}_j)} bo) + K2^{m/2}$$

일 조건부 확률이 1/5 이상이다. (**)

이제 재료들을 조합해 보자. (*), (**)로부터, 각 $\mathcal{E} \times \dot{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}$ 에서 (Ω 및 $\dot{\Omega}$ 에 대한) 부등식 6.2, 부등식 6.3 및 6.4가 성립할 확률이 $1/5 - 1/1000$ 이상이라는 것을 알 수 있다. 이런 경우 부등식 6.3에서 $2 \sum_{l=0}^m \mathbb{E}[Y_l | \mathcal{E}]$ 를 $2 \sum_{l=0}^m Y_l$ 로,

$2 \sum_{l=0}^m \mathbb{E}[Y_l | \mathcal{E}]$ 를 $2 \sum_{l=0}^m \dot{Y}_l$ 로 바꾸어

$$(6.5) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2^m-1} d(x_{2i}, x_{2i+1}) + d(x_{2^{m+1}}, \omega_{n_m} o) - 2 \sum_{l=0}^m Y_l \\ & \geq \sum_{i=0}^{2^m-1} d(\dot{x}_{2i}, \dot{x}_{2i+1}) + d(\dot{x}_{2^{m+1}}, \dot{\omega}_{n_m} o) - 2 \sum_{l=0}^m \dot{Y}_l - 1600F_0 2^{m/2} \end{aligned}$$

를 얻을 수 있다. 이제 부등식 6.5과 6.4의 양변을 더하자. 항등식

$$\sum_{i=1}^{2^m} [d(x_{2i-2}, x_{2i-1}) + d(x_{2i-1}, x_{2i})] - 2 \sum_{l=0}^m Y_l = d(x_0, x_{2^{m+1}}),$$

$d(o, a\xi_{\vartheta(i_j)}bo) = d(x_{2j-1}, x_{2j})$ 및 $(o, \omega_{n_m} o)_{x_{2^{m+1}}} \leq F_0$ 를 이용하면

$$(6.6) \quad d(o, \omega_{n_m} o) - d(o, \dot{\omega}_{n_m} o) \geq (K - 1600F_0)2^{m/2} - 4F_0$$

임을 알 수 있다. 결론적으로, $\mathcal{E} \times \dot{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}$ 에서 부등식 6.6이 성립할 조건부 확률이 0.199 이상이다. 이를 모두 더하면 최소

$$0.199 \cdot \mathbb{P} \left(\bigcup \mathcal{E} \right) \geq 0.199 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \mathbb{P}[\omega \notin \Omega] - \mathbb{P}[\dot{\omega} \notin \dot{\Omega}] \right) \geq 0.099 \cdot (1 - 2e^{-\kappa n_m})$$

라는 확률을 얻는다. K 를 바꿀 수 있으므로, 임의의 $K > 0$ 에 대해 결국에는

$$\mathbb{P} \left[\frac{1}{\sqrt{n_m}} [d(o, \omega_{n_m} o) - d(o, \dot{\omega}_{n_m} o)] \geq K \right] \geq 0.09$$

가 성립하게 됨을 알 수 있다. 이는 $\frac{1}{\sqrt{n}} [d(o, \omega_n o) - c_n]$ 가, 즉 따라서 $\frac{1}{\sqrt{n}} [d(o, \omega_n o) - d(o, \dot{\omega}_n o)]$ 가, 분포상 수렴하면 불가능한 일이다.

이동 거리에 대해서도 마찬가지로 결론을 얻기 위해서는

$$\mathbb{P} [d(o, \omega_n o) - \tau(\omega_n) \geq \sqrt{n}, d(o, \omega_n o) \geq 10\sqrt{n}] \leq 0.021$$

가 충분히 큰 n 에 대해 성립함을 증명하기만 하면 된다. 먼저 $\mathbb{P}(|Q_{n_1}| \leq 2) \leq 10^{-5}$ 가 성립하는 n_1 을 잡고, ω 의 두번째 중추 시점이 $i(2)$ 일 때 $Y(\omega) := d(o, y_{i(2),0}^-)$ 라고 확률 변수를 하나 정의한다. 이 변수는 거의 모든 지점에서 유한하므로 $\mathbb{P}(Y(\omega) \geq 0.4\sqrt{n_2}) \leq 10^{-5}$ 가 성립하는 n_2 가 존재한다. 이제 $n > \max(n_1, n_2)$ 로 잡으면, 확률이 최대 $2 \cdot 10^{-5}$ 인 사건을 제외하고서는 $d(o, y_{i(1),0}^-), d(o, y_{i(2),0}^-) \leq 0.4\sqrt{n}$ 임을 알 수 있다. E 를 그러한 자취 ω 들의 모임이라고 하자.

이제 $\omega \in E$, $d(o, \omega_n o) - \tau(\omega_n) \geq \sqrt{n}$ 및 $d(o, \omega_n o) \geq 10\sqrt{n}$ 라고 가정하자. 이제 ω 의 첫 두 중추 시점에서 방향 전환된 자취들 $\bar{\omega}$ 의 모임 $\mathcal{E}_n^2(\omega)$ 을 생각하자. 만약 n 가 충분히 크면,

$$d(o, \omega_n o) - d(o, y_{i(2),0}^-) - d(o, y_{i(1),2}^-) \geq 8\sqrt{n} - 2\mathcal{M} \geq 2\mathcal{M} + 3D_0$$

가 성립하고 Theorem A의 증명 논법에 따르며

$$d(o, \omega_n o) - \tau(\omega_n) \leq 2d(o, y_{i(1),0}^-) + 2F_0 \leq \sqrt{n}$$

일 확률이 최소 $1 - [305^2 - 303^2]/305^2 \geq 1 - 0.02$ 이다. 따라서, E 에서 조건부 확률들을 다 더하면, $\frac{1}{\sqrt{n}}[d(o, \omega_n o) - \tau(\omega_n)] \geq 1$ 및 $d(o, \omega_n o) \geq 10\sqrt{n}$ 가 E 안에서 일어날 확률은 0.02 이하이다. E 바깥에서는 기껏해야 $2 \cdot 10^{-5}$ 만큼의 확률만이 남아있으므로, 원하던 결론이 따라 나온다. \square

6.2. 중심극한정리 이 항의 목적은 $d(o, \omega_n o)$ 에 대한 중심극한정리를 증명하는 것이다. $(\omega_n^{-1} o, \omega_n o)_o$ 를 일정하게 통제된 뒤에는, Gaussian 분포로 수렴해 간다는 사실은 [MS20]로부터 따라 나온다. 그러나 비자명한 Gaussian 분포로 수렴한다고 단언하기 위해서는 먼저 분산 값의 하한을 설정할 수 있어야 하는데, 이를 이제 설명하겠다.

Proof. μ 가 산술적이지 않으므로, $g = a_1 \cdots a_l$, $g' = b_1 \cdots b_l$ 가 $d(o, go) - d(o, g'o) \geq 104F_0 + 4M$ 이도록 하는 $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_l \in \text{supp } \mu$ 가 존재한다. S_0 의 원소가 4개 이상이므로, $g, g' \in A_{a,b}$ 가 성립하게 하는 $a, b \in S_0$ 가 존재한다. 이제 크기 305 이상인 $S_0 \setminus \{a, b\}$ 의 부분집합 S 를 잡고, $\mu_{g,g'}$ 를 $\{(a_1, \dots, a_l), (b_1, \dots, b_l)\}$ 위에서의 균등 측도로 잡자. 그러면 적당한 측도 ν 및 $0 < \alpha < 1$ 에 대해

$$\mu^{6N+l} = \alpha(\mu_S^2 \times 1_{\{a\}} \times \mu_{g,g'} \times 1_{\{b\}} \times \mu_S^2) + (1 - \alpha)\nu$$

가 성립한다. 그러면 이전 항에서와 같이 확률 변수들과 중추 시점/지점들을 정의할 수 있다. 이번에는 ξ_i 를 η_i 의 $(3N+1), \dots, (3N+l)$ 번째 성분들의 곱으로 정의하겠다.

Claim 6.1. $\text{Var} \left[d(o, \omega_n) \mid |P_n(\omega)| \geq 2^m \right] \geq 900F_0^2 2^m$ 가 성립한다.

Proof of Claim 6.1. 이전 항에서 정의한 Ω_0 안의 동치류들을 상기하라. 첫 2^m 개 중추 시점을 i_1, \dots, i_{2^m} 로 가지는 각 동치류 \mathcal{E} 마다,

$$\text{Var} \left[d(x_{2^k(l-1)}, x'_{2^k l}) \mid \mathcal{E} \right] \geq F_0^2 \left[900 \cdot 2^k + 240 \cdot 2^{k/2} \right].$$

가 $k = 1, \dots, m+1$ 및 $l = 1, \dots, 2^{m-k+1}$ 에 대해 성립함을 귀납적으로 증명할 것이다. 여기서 $l = 2^{m-k+1}$ 일 때 $x'_{2^k l} = \omega_n o$ 이고 그 외의 경우에는 $x'_{2^k l} = x_{2^k l}$ 로 둔다. k 가 $m+1$ 에 다다랐을 때 조건부 확률들을 모두 더하면 원하는 주장이 따라 나온다.

$k = 1$ 인 경우를 다뤄 보자. 각 $1 \leq l < 2^m$ 마다, $w = (w_{i_l,0}^-)^{-1} w_{i_{l-1},0}^+$ 는 \mathcal{E} 전체에 걸쳐 고정되어 있고, $(x_{2l-2}, x_{2l})_{x_{2l-1}} = (wo, a\xi_{\vartheta(i_l)} bo)_o \leq F_0$ 이며,

$\xi_{\vartheta(i_l)} = g$ 혹은 g' 이면서 확률값이 같다. 이는

$$\begin{aligned} \text{Var}[d(x'_{2l-2}, x'_{2l})] &= \left[\frac{1}{2} |d(wo, agbo) - d(wo, ag'bo)| \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| \begin{array}{c} [d(wo, o) + d(o, agbo) - 2(wo, agbo)_o] \\ - [d(wo, o) + d(o, ag'bo) - 2(wo, ag'bo)_o] \end{array} \right|^2 \\ &\geq \frac{1}{4} (|d(o, agbo) - d(o, ag'bo)| - 2F_0)^2 \\ &\geq \frac{1}{4} (|d(o, go) - d(o, g'o)| - 4\mathcal{M} - 2F_0)^2 \\ &\geq 2500F_0^2 \geq F_0^2 \cdot [1800 + 240\sqrt{2}] \end{aligned}$$

임을 의미한다. $l = 2^m$ 인 경우에도 비슷하게

$$\text{Var}[d(x'_{2l-2}, x'_{2l+1})] \geq \frac{1}{4} (|d(o, go) - d(o, g'o)| - 4\mathcal{M} - 4F_0)^2 \geq 2500F_0^2$$

임을 알 수 있다.

이제 어떤 $1 \leq k \leq m$ 및 $1 \leq l \leq 2^{m-k}$ 에 대해 $Y_1 = d(x'_{2^k(2l-2)}, x'_{2^k(2l-1)})$ 및 $Y_2 = d(x'_{2^k(2l-1)}, x'_{2^k \cdot 2l})$ 가 주어진 추산을 만족시킨다고 하자. 이제 $b = 2(x'_{2^k(l-2)}, x'_{2^k l})_{x'_{2^k(l-1)}}$ 를 수반하는 $Y = d(x'_{2^{k+1}(l-1)}, x'_{2^{k+1}l}) = Y_1 + Y_2 - b$ 의 분산을 어림할 것이다. Y_1, Y_2 가 독립이고 $0 \leq b \leq 2F_0$ 이므로,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &\geq \text{Var}(Y_1) + \text{Var}(Y_2) - 2F_0 \cdot \sqrt{\text{Var}(Y_1)} - 2F_0 \cdot \sqrt{\text{Var}(Y_2)} \\ &= \text{Var}(Y_1) \left[1 - \frac{2F_0}{\sqrt{\text{Var}(Y_1)}} \right] + \text{Var}(Y_2) \left[1 - \frac{2F_0}{\sqrt{\text{Var}(Y_2)}} \right] \\ &\geq 2 \cdot F_0^2 \left[900 \cdot 2^k + 240 \cdot 2^{k/2} \right] \left[1 - \frac{2F_0}{F_0 \cdot 30 \cdot 2^{k/2}} \right] \\ &\geq 2 \cdot F_0^2 \left[900 \cdot 2^k + 180 \cdot 2^{k/2} - 16 \right] \\ &\geq F_0^2 \left[900 \cdot 2^{k+1} + 240 \cdot 2^{(k+1)/2} + (360 - 240\sqrt{2})2^{k/2} - 16 \right] \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. $360 - 240\sqrt{2} \geq 16$ 이므로 $k + 1$ 를 위한 결론을 얻는다. \square

특히, Claim 6.1 및 Proposition 5.1를 결합하면

$$(6.7) \quad \text{Var}[d(o, \omega_n o)] \geq 100F_0^2 \kappa_1 n$$

가 충분히 큰 n 에 대해 성립한다는 것을 알 수 있다.

증명 나머지는 [MS20, Section 4]의 이론을 이용할 것이다. 먼저 $M > 0$ 을 고정하고 확률변수들

$$Y_{k,i} = d(\omega_{2^k M(i-1)} o, \omega_{2^k M i} o), \quad b_{k,i} = (\omega_{2^k M(i-1)} o, \omega_{2^k M(i+1)} o)_{\omega_{2^k M i} o}$$

(Figure 5 참조) 및 이들의 균형 잡힌 버전

$$\bar{Y}_{k,i} = Y_{k,i} - \mathbb{E}[Y_{k,i}], \quad \bar{b}_{k,i} = b_{k,i} - \mathbb{E}[b_{k,i}]$$

을 고려하자. 이때 다음을 알 수 있다:

- (1) $\{Y_{k,i}\}_{i \in \mathbb{Z}}, \{b_{k,i}\}_{i \in 2\mathbb{Z}+1}, \{b_{k,i}\}_{i \in 2\mathbb{Z}}$ 각각은 i.i.d.의 모임이다;
- (2) 모든 k, i 에 대해 $\mathbb{E}[b_{k,i}^4] < K^2$ 인 $K > 0$ 이 존재한다 (Proposition 5.8);
- (3) $\mathbb{E}[\bar{b}_{k,i}^2] \leq \mathbb{E}[(b_{k,i} - \mathbb{E}[b_{k,i}])^2] \leq 4\mathbb{E}[b_{k,i}^2] \leq 4K$ 이다;
- (4) 각 k, i 에 대해 $Y_{k+1,i} = Y_{k,2i-1} + Y_{k,2i} - 2b_{k,2i-1}$ 이다.

먼저 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $\frac{1}{\sqrt{n}}[\mathbb{E}[d(o, \omega_n o)] - n\lambda] \rightarrow 0$ 임을 증명하자.

$$\frac{1}{2^k M} \mathbb{E}[Y_{k,1}] = \frac{1}{2^k M} \sum_{i=1}^{2^k} \mathbb{E}[Y_{0,i}] - \frac{2}{2^k M} \sum_{t=0}^{k-1} \left[\sum_{i=1}^{2^{k-t-1}} \mathbb{E}[b_{t,2i-1}] \right]$$

임을 관찰하라. 여기서 $k \rightarrow \infty$ 일 때 좌변은 탈출 속도 λ 로 수렴하며, 우변 첫 항은 항상 $\frac{1}{M} \mathbb{E}[d(o, \omega_M o)]$ 로 유지된다. 마지막으로, 모든 t, i 에 대해 $\mathbb{E}[b_{t,2i-1}] < \sqrt{K}$ 이므로 우변 마지막 항은 $2\sqrt{K}/M$ 에 의하 한정된다. 따라서 $|\sqrt{n}\lambda - \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}[d(o, \omega_n o)]| \leq 2\sqrt{K}/\sqrt{n}$ 라는 원하는 현상을 얻는다.

이제부터 0보다 큰 정수 m 을 잡아 $M = 2^m$ 로 두겠다. 이때

$$(6.8) \quad \frac{1}{\sqrt{2^{k+m}}} Y_{k,1} = \frac{1}{\sqrt{2^{k+m}}} \sum_{i=1}^{2^k} Y_{0,i} - \frac{2}{\sqrt{2^{k+m}}} \sum_{t=0}^{k-1} \left[\sum_{i=1}^{2^{k-t-1}} b_{t,2i-1} \right]$$

임을 관찰하라. 균형 잡힌 버전들에 대해서도 비슷한 항등식이 성립한다.

여기서 오차 항 $\sum_t \sum_i \bar{b}_{t,2i-1}$ 을 분석하자. 각 t 에 대해, $\sum_i \bar{b}_{t,2i-1}/\sqrt{2^{k+m}}$ 는 각각 $K/2^{k+m}$ 에 의해 한정된 독립적인 확률변수 2^{k-t-1} 개를 합한 것이다. 따라서 이 합은 분산이 $K/2^{m+t+1}$ 이하이고 Chebyshev 부등식에 의해

$$\mathbb{P} \left(E_t := \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2^{k+m}}} \sum_{i=1}^{2^{k-t-1}} \bar{b}_{t,2i-1} \right| \geq 2^{-m/3} 2^{-t/4} \right\} \right) \leq \frac{tK}{2^{m/3+t/2+1}}$$

가 성립한다. 따라서 $\cup_t E_t$ 바깥에서는 $\frac{1}{\sqrt{2^{k+m}}} \sum_t \sum_i \bar{b}_{t,2i-1}$ 가 $7 \cdot 2^{-m/3}$ 에 의해 한정되며 이때 $\mathbb{P}(\cup_t E_t) \leq 8K \cdot 2^{-m/3}$ 이다.

한편 고전적인 중심극한정리에 의해, k 가 증가함에 따라 $\frac{1}{\sqrt{2^{k+m}}} \sum_{i=1}^{2^k} \bar{Y}_{0,i}$ 는 어떤 Gaussian 분포 $\mathcal{N}(0, \sigma_m)$ 로 수렴해 간다. 이때 부등식 6.7은 충분히 큰 m 에 대해 $\sigma_m := \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sqrt{\text{Var}(d(o, \omega_{2^m} o))} \geq 10F_0 \sqrt{\kappa}$ 임을 보장해 준다.

요약하자면, 확률변수 $\frac{1}{\sqrt{2^k}} [d(o, \omega_{2^k} o) - \mathbb{E}[d(o, \omega_{2^k} o)]]$ 들은 결국에는 Lévy 거리상 $\mathcal{N}(0, \sigma_m)$ 에 $(16K+15) \cdot 2^{-m/3}$ -가까워진다. 이는 $\mathcal{N}(0, \sigma_m)$ 가 Cauchy 임을 의미하며, σ_m 에 하한이 정해져 있으므로 이들은 비자명한 Gaussian 분포 $\mathcal{N}(0, \sigma)$ 로 수렴한다 (그러면 $\lim_m \sigma_m = \sigma$ 이다).

이제 일반적인 단계에서의 분포들을 다루기 위해, 보조 확률변수

$$Y_{k;n} = d(\omega_{2^{k+m} \lfloor n/2^{k+m} \rfloor} o, \omega_n o),$$

$$b_{k;n} = \begin{cases} (\omega_{2^{k+m+1} \lfloor n/2^{k+m+1} \rfloor} o, \omega_n o)_{\omega_{2^{k+m} (2 \lfloor n/2^{k+m+1} \rfloor + 1)} o} & \text{if } 2^{k+m} (2 \lfloor n/2^{k+m+1} \rfloor + 1) < n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

를 생각하자.

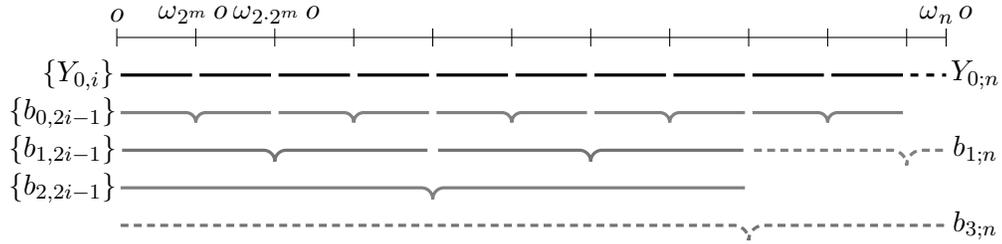


FIGURE 5. $10 \cdot 2^m \leq n \leq 11 \cdot 2^m$ 일 때의 $\{Y_{k,i}\}$, $\{Y_{k;n}\}$, $\{b_{k,i}\}$ 및 $\{b_{k;n}\}$. 여기서 $b_{0;n} = b_{2;n} = 0$ 인데 그 이유는 $2^m (2 \lfloor n/2^{m+1} \rfloor + 1) = 11 \cdot 2^m \geq n$ 및 $2^{m+2} (2 \lfloor n/2^{m+3} \rfloor + 1) = 12 \cdot 2^m \geq n$ 이기 때문이다.

여기서 임의의 k, i, n 에 대해 $\mathbb{E}[b_{k,i;n}^2] \leq 4K$ 가 여전히 성립한다($q = 0$ 및 $p = 2$ 인 경우의 Proposition 5.9). 이제

$$(6.9) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} [d(o, \omega_n o) - \mathbb{E}[d(o, \omega_n o)]] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor n/2^m \rfloor} \bar{Y}_{0,i} + \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{Y}_{0;n} - \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{2^{m+t} \leq n} \left[\bar{b}_{t;n} + \sum_{i=1}^{\lfloor n/2^{m+t+1} \rfloor} \bar{b}_{t,2i-1} \right]$$

임을 관찰하자. $n \rightarrow \infty$ 일 때 첫번째 항은 분포상 $\mathcal{N}(0, \sigma_m)$ 로 수렴한다. 두번째 항은 확률상 0으로 수렴하며, 사실은 거의 확실하게 0으로 수렴한다. 이는 유한 개의 분포 $\{Y_{0,i}; i = 0, \dots, 2^m - 1\}$ 가 유한한 분산을 가지기 때문이다. 나아가, 각 $2^{m+t} \leq n$ 에 대해

$$\text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left[b_{t;n} + \sum_{i=1}^{\lfloor n/2^{m+t+1} \rfloor} b_{t,2i-1} \right] \right) \leq \frac{4K}{n} \cdot \left[\left\lfloor \frac{n}{2^{m+t+1}} \right\rfloor + 1 \right] \leq \frac{4K}{2^{m+t}}$$

임을 알 수 있다. 이는 확률 $16K \cdot 2^{-m/3}$ 이하인 사건을 제외하고서는 마지막 항의 크기가 $7 \cdot 2^{-m/3}$ 보다 작음을 의미한다. 결론적으로 각 m 에 대해, $\frac{1}{\sqrt{n}} [d(o, \omega_n o) - \mathbb{E}[d(o, \omega_n o)]]$ 는 $\mathcal{N}(0, \sigma_m)$ 에 궁극적으로 $(32K + 15)2^{-m/3}$ -가 가까워진다는 사실을 알 수 있다. 여기서 $\mathcal{N}(0, \sigma_m) \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma)$ 이므로, $\frac{1}{\sqrt{n}} [d(o, \omega_n o) - \mathbb{E}[d(o, \omega_n o)]] \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma)$ 라는 사실이 따라 나온다. \square

7. 중첩 로그 법칙

이 절 내내 다음 표기법을 고정하겠다:

$$LLn := \begin{cases} \log \log n & n \geq 3 \\ 1 & n < 2, \end{cases} \quad \alpha(n) := (2nLLn)^{1/2}, \quad \beta(n) := (n/LLn)^{1/2}.$$

이 절에서는 고전적인 중첩 로그 법칙을 위한 [dA83]에 적힌 de Acosta의 논증을 따라가 우리가 원하는 중첩 로그 법칙을 증명하려 한다. 증명을 시작하기 전에 de Acosta의 전략을 간단히 소개하겠다. $\{X_i\}$ 가 $Var(X_i) < K$ 를 만족시키는 균형 잡힌 i.i.d.의 나열이라고 하자. $\sum_{i=1}^n X_i$ 가 $\alpha(n)$ 수준에서 요동치는 정도를 조사하기 위해, de Acosta는 먼저 X_n 를 잘라내 $Y_n := X_n 1_{\{|X_n| \leq \beta(n)\}}$, $Z_n := X_n 1_{\{|X_n| > \beta(n)\}}$ 를 만들었다(편의상 $\mathbb{E}[Y_n] = 0$ 라고 잠시 가정하자).

이때 잘라내는 기준 $T\beta(n)$ 은 X_i 의 유한한 분산으로부터 $\sum_{i=1}^n |Z_i|/\alpha(i)$ 의 거의 모든 곳에서의 수렴을 이끌어낼 수 있도록 설계된 것이다. 그후 Kronecker의 보조정리를 사용하면 $(\sum_{i=1}^n Z_i)/\alpha(n)$ 항이 별로 크게 기여하지 않음을 알 수 있다. Y_n 의 경우 Y_n 끼리의 독립성, Y_n 이 잘려진 기준 및 Chebyshev 부등식을 활용해

$$\mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n Y_i/\alpha(n) > t \right\} \leq \exp \left[-\lambda t + \frac{\lambda^2 K}{4LLn} \exp \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2LLn}} \right) \right]$$

가 임의의 $t, \lambda > 0$ 에 대해 성립함을 보일 수 있다. 마지막으로 선보일 기술은 사건들 $E_n := \{\sum_{i=1}^n X_i/\alpha(n) > t\}$ 의 나열을 등비수열적인 부분열 $E_{\lfloor p^k \rfloor}$ 와 결부하여

$$(7.1) \quad \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \geq p^{k_0}} E_n \right) \leq C \sum_{k \geq k_0} \mathbb{P} \left(E_{\lfloor p^k \rfloor} \right)$$

와 같은 현상을 기대하는 것이다. 적절한 t 및 λ 를 설정함으로써 이 급수가 수렴하게 할 수 있고 Borel-Cantelli 보조정리를 사용하면 거의 모든 곳에서의 $\limsup(\sum_{i=1}^n X_i)/\alpha(n)$ 의 상한을 얻을 수 있다.

이제 원래 상황으로 돌아오자. Equation 6.9의 두번째 항은 분모가 $\alpha(n)$ 으로 바뀌어도 여전히 0으로 수렴한다. De Acosta의 논법이 필요한 부분은 Equation 6.9의 마지막 항이다. 여기서 추가로 등장하는 난관은 i.i.d.의 합들의 무한열 $\{\sum_i \bar{b}_{t,2i-1}\}_t$ 를 다루는 것이다. 각 $\{\bar{b}_{t,2i-1}\}_i$ 를 위한 부등식 7.1 우변의 한계를 잡는 것뿐만 아니라, 그 한계가 t 에 대해 합했을 때 유한하도록 할 수 있어야 한다.

Claim 7.1. 각 $K' > 0$ 마다,

$$\mathbb{P} \left\{ \limsup_n \frac{1}{\alpha(n)} \left| \sum_{t \geq T} \sum_{i=1}^{\lfloor n/2^{m+t+1} \rfloor} \bar{b}_{t,2i-1} \right| > K' \right\} \leq K'$$

를 만족시키는 $T > 0$ 가 존재한다.

Proof. 다음 집합 및 확률변수들을 고려하자:

$$E_{t,i} := \left\{ \omega : |\bar{b}_{t,2i-1}| > \frac{\beta(2^{t+m+1}i)}{2^{t/4}} \right\},$$

$$B_{t,2i-1} := \bar{b}_{t,2i-1} 1_{E_{t,i}}, \quad B'_{t,2i-1} := \bar{b}_{t,2i-1} 1_{E_{t,i}^c}, \quad \bar{B}'_{t,2i-1} := B'_{t,2i-1} - \mathbb{E} B'_{t,2i-1}.$$

여기서

$$\begin{aligned} |\mathbb{E} B'_{t,2i-1}| &= |\mathbb{E} B_{t,2i-1}| \leq \mathbb{E} |B_{t,2i-1}| \leq \mathbb{E} |\bar{b}_{t,2i-1}| \\ &= \mathbb{E} |b_{t,2i-1} - (\mathbb{E} b_{t,2i-1})| \leq 2 \mathbb{E} |b_{t,2i-1}| \leq 2\sqrt{K}, \\ |\bar{B}'_{t,2i-1}| &\leq |B'_{t,2i-1}| + |\mathbb{E} B'_{t,2i-1}| \leq 2 \cdot \frac{\beta(2^{t+m+1}i)}{2^{t/4}}, \\ \mathbb{E}(\bar{B}'_{t,2i-1})^2 &\leq \mathbb{E}(|B'_{t,2i-1}| + |\mathbb{E} B'_{t,2i-1}|)^2 \\ &\leq 4 \mathbb{E} |B'_{t,2i-1}|^2 \leq 4 \mathbb{E} \bar{b}_{t,2i-1}^2 \leq 16K \end{aligned}$$

가 성립함을 알 수 있다.

첫번째 목표는

$$(7.2) \quad \sum_{t \geq T} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} |B_{t,2i-1}| / \alpha(2^{t+m+1}i) < \infty$$

를 증명하는 것이다. 이것이 주어지면, Kronecker의 보조정리가

$$(7.3) \quad \lim_n \frac{1}{\alpha(n)} \left| \sum_{t \geq T} \sum_{i=1}^{\lfloor n/2^{t+m+1} \rfloor} B_{t,2i-1} \right| = 0 \quad \text{a.s.}$$

임을 암시할 것이다. Inequality 7.2를 증명하기 위해, 충분히 큰 t 에 대해

$$(7.4) \quad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} |B_{t,2i-1}| / \alpha(2^{t+m+1}i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha(2^{t+m+1}(i+k))} \frac{\beta(2^{t+m+1}(i+k+1))}{2^{t/4}} \mathbb{P} \left[\frac{\beta(2^{t+m+1}(i+k))}{2^{t/4}} < |\bar{b}_{t,2i-1}| \leq \frac{\beta(2^{t+m+1}(i+k+1))}{2^{t/4}} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta(2^{t+m+1}(j+1))}{2^{t/4}} \mathbb{P} \left[\frac{\beta(2^{t+m+1}j)}{2^{t/4}} < |\bar{b}_{t,1}| \leq \frac{\beta(2^{t+m+1}(j+1))}{2^{t/4}} \right] \cdot \sum_{i=1}^j \frac{1}{\alpha(2^{t+m+1}i)} \end{aligned}$$

가 성립함을 관찰하자. 여기에는 $x \geq 8$ 일 때 $\beta(x)$ 가 증가한다는 것과 $\{\bar{b}_{t,2i-1}\}_i$ 가 i.i.d.라는 사실이 쓰였다. 또한,

$$\sum_{i=1}^j \frac{1}{\alpha(2^{t+m+1}i)} \leq \frac{10}{2^{t+m+1}} \beta(2^{t+m+1}j), \quad \beta(2^{t+m+1}(j+1)) \leq 1.1\beta(2^{t+m+1}j)$$

가 각 j 에 대해 성립한다. 따라서 부등식 7.4 마지막 부분의 값은

$$\begin{aligned} & 11 \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-5t/4-m-1} \beta^2(2^{t+m+1}j) \mathbb{P} \left[\frac{\beta(2^{t+m+1}j)}{2^{t/4}} < |\bar{b}_{t,1}| \leq \frac{\beta(2^{t+m+1}(j+1))}{2^{t/4}} \right] \\ & \leq 11 \cdot 2^{-3t/4} \text{Var}(\bar{b}_{t,1}) \leq 44K \cdot 2^{-3t/4} \end{aligned}$$

에 의해 한정되는데, 이는 합했을 때 분명 유한하다. 부등식 7.2가

$$\sum_{t \geq T} \sum_i \mathbb{E} |B'_{t,2i-1}| / \alpha(2^{t+m+1}i) = \sum_{t \geq T} \sum_i \mathbb{E} |B_{t,2i-1}| / \alpha(2^{t+m+1}i) < \infty$$

또한 암시한다는 점을 유의하라. 다시금 Kronecker의 보조정리를 사용하면,

$$(7.5) \quad \lim_n \frac{1}{\alpha(n)} \left| \sum_{t \geq T} \sum_{i=1}^{\lfloor n/2^{m+t+1} \rfloor} \mathbb{E} B'_{t,2i-1} \right| = 0$$

임을 알 수 있다.

이제 $t \geq T$ 에 대해 $\{\bar{B}'_{t,2i-1}\}_i$ 를 다룰 차례다. 이들은 균형 잡힌 i.i.d.로

$$\mathbb{E}(\bar{B}'_{t,2i-1})^2 \leq 16K \quad \text{and} \quad |\bar{B}'_{t,2i-1}| \leq 2^{1-t/4} \cdot \beta(2^{t+m+1}i)$$

를 만족하므로, [dA83]의 Lemma 2.2의 증명을 이용하면

$$(7.6) \quad \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n \bar{B}'_{t,2i-1} > 2^{-t/8} \sqrt{K} \alpha(2^{m+t+1}n) \right\} \leq \exp \left[- \left(2 \cdot 2^{t/8} - \frac{16}{2^{t/2+m+1}} e^{2\sqrt{2}/\sqrt{K}} \right) LL(2^{m+t+1}n) \right]$$

임을 보일 수 있는데, 이는 충분히 큰 t 에 대해 $\exp[-2^{t/8} LL(2^{m+t+1}n)]$ 로 한정된다. 더하여, Chebyshev의 부등식에 의해

$$(7.7) \quad \mathbb{P} \left[\left| \sum_{i=1}^{2^k} \bar{B}'_{t,2i-1} \right| \geq 2^{-t/8} \sqrt{K} \alpha(2^{m+t+1} \cdot 2^k) \right] \leq \frac{16 \cdot 2^k K}{2^{-t/4} \alpha^2(2^{m+t+1} \cdot 2^k) K} \leq 1/2$$

가 각 $k \geq 1$ 및 $n \leq 2^k$ 에 대해 성립한다는 점을 유의하라.

이제 $|\sum_{i=1}^{\lfloor n/2^{m+t+1} \rfloor} \bar{B}'_{t,2i-1}| > 3 \cdot 2^{-t/8} \sqrt{K} \alpha(n)$ 가 하나 이상의 n 에 대해 성립할 확률을 어렵해 보자. 이는

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P} \left[\max_{2^k \leq n < 2^{k+1}} \left| \sum_{i=1}^n \bar{B}'_{t,2i-1} \right| > 3 \cdot 2^{-t/8} \sqrt{K} \alpha(2^{m+t+1} \cdot 2^k) \right]$$

에 의해 한정된다. 부등식 7.7 및 Ottaviani의 부등식을 생각하면 이는 최대

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P} \left[\sum_{i=1}^{2^{k+1}} |\bar{B}'_{t,2i-1}| > 2 \cdot 2^{-t/8} \sqrt{K} \alpha(2^{m+t+1} \cdot 2^k) \right]$$

이다. 여기서 충분히 큰 t 및 모든 k 에 대해 $2\alpha(2^{m+t+1} \cdot 2^k) \geq \alpha(2^{m+t+1} \cdot 2^{k+1})$ 이므로, 부등식 7.6를 이용하면

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} ([k + m + t + 2] \log 2)^{-2 \cdot 2^{t/8}} \leq 2 \sum_{k=t}^{\infty} (k \log 2)^{-4} \leq \frac{1}{t^3 (\log 2)^4}$$

로 한정지을 수 있다. T 를 충분히 크게 잡으면 $\sum_{t \geq T} t^{-3} (\log 2)^{-4} < K'$ 가 성립한다. 다시금 T 를 충분히 크게 잡으면, 이 사건 바깥에서는 모든 n 에 대해

$$(7.8) \quad \frac{1}{\alpha(n)} \sum_{t \geq T} \sum_{i=1}^{\lfloor n/2^{m+t+1} \rfloor} \bar{B}'_{t,2i-1} \leq 3\sqrt{K} \sum_{t \geq T} 2^{-t/8} \leq 30\sqrt{K} \cdot 2^{-T/8} < K'$$

이다. 이를 Equation 7.3 및 7.5와 엮으면 원하는 결론에 다다른다. \square

다음으로 나머지 항 $\bar{b}_{t;n}$ 들 또한 해결해야 한다. 여기서 각 t 에 대해, 각 단계 n 에서 오직 한 $\bar{b}_{t;n}$ 만 등장한다는 것을 유의하라. 이는 오차 사건들 $\{\bar{b}_{t;n} > K'\alpha(n)\}$ 을 따로따로 독립적으로 다루어야만 한다는 뜻이다(예를 들어, Ottaviani 부등식에 의존해 부분열 사건들에만 집중하는 것은 힘들다는 뜻이다). 지금 $\sqrt{n \log \log n}$ 수준의 현상을 다루고 있으므로, 2차 모멘트는 그다지 유용하지 않다. 한편 4차 모멘트에 대한 한계는 $\mathbb{E}[\bar{b}_{t;n}^4] \lesssim (2^{t+m})^2$ 밖에 없으므로 충분히 잘 통제할 수 없다. 따라서 우리는 3차 모멘트를 타협점으로 두고 어렵잖을 계산할 것이다.

Claim 7.2.

$$\limsup_n \frac{1}{\alpha(n)} \left| \sum_{2^{m+t} \leq n} \bar{b}_{t;n} \right| = 0 \quad a.s.$$

Proof. $K' > 0$ 이라고 하자. $t \geq 0$ 및 $1 \leq k \leq 2^{t+m}$ 가 주어졌을 때 $\{\bar{b}_{t,2^{t+m}(2i-1)+k}\}_i$ 는 i.i.d.의 모임이다. 이 경우, Proposition 5.9는

$$\mathbb{E}[b_{t,2^{t+m}+k}] \leq K'_3 + K'_3 e^{-k/K'_3} \cdot 2^{t+m}$$

가 성립하게 하는 일정한 상수 K' 가 존재한다는 것을 알려 준다. $K_3 = 8K'_3$ 로 두면

$$\mathbb{E}|\bar{b}_{t,2^{t+m}+k}|^3 \leq \mathbb{E}(|b_{t,2^{t+m}+k}| + |\mathbb{E} b_{t,2^{t+m}+k}|)^3 \leq K_3 + K_3 e^{-k/K_3} \cdot 2^{t+m}$$

또한 성립한다. 이제

$$E_{t,k,i} := \left\{ \omega : |\bar{b}_{t,2^{t+m}(2i-1)+k}| > \frac{K' \sqrt{2^{t+m}(2i-1)}}{2^{t/8}} \right\}$$

을 정의하자. 그러면 $Y_{t,k} = |\bar{b}_{t;2^{t+m+k}}|/(2^{3t/8+m/2}K')$ 에 대해

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_{k,t,i}] &\leq \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \mathbb{P} \left\{ \frac{K' \sqrt{2^{t+m}i}}{2^{t/8}} < |\bar{b}_{t;2^{t+m+k}}| \leq \frac{K' \sqrt{2^{t+m}(i+1)}}{2^{t/8}} \right\} \\ &\leq \int Y_{t,k}^2 1_{Y_{t,k} \geq 1} dY_{t,k} \leq \int Y_{t,k}^3 dY_{t,k} \leq \frac{1}{2^{9t/8+3m/2}K'^3} \mathbb{E} |\bar{b}_{t;2^{t+m+k}}|^3 \\ &\leq \frac{K_3}{K'^3} 2^{-9t/8-3m/2} + \frac{K_3}{K'^3} e^{-k/K_3} \cdot 2^{-t/8-m/2} \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이를 모두 더하여

$$\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{0 \leq k \leq 2^t} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_{k,t,i}] < \infty$$

를 얻는다. 그러면 Borel-Cantelli 보조정리에 의해, 거의 모든 ω 마다

$$|\bar{b}_{t;n}(\omega)| \leq \frac{K' \alpha(n)}{2^{t/8}}$$

가 모든 t 및 유한 개를 제외한 모든 n 에 대해 성립함을 알 수 있다. 따라서 그러한 ω 에 대해

$$\frac{1}{\alpha(n)} \left| \sum_t \bar{b}_{t;n} \right| \leq 16K'$$

가 궁극적으로 성립한다. \square

이제 중첩 로그 정리의 증명을 끝낼 수 있다. $K' > 0$ 를 고정한 뒤 Claim 7.1에서와 같이 $T > 0$ 를 잡자. 고전적인 중첩 로그 정리는

$$\limsup_n \frac{1}{\alpha(n)} \left| \sum_{i=1}^{\lfloor n/2^{m+t+1} \rfloor} \bar{b}_{t,2i-1} \right| \leq \frac{4K}{\sqrt{2^{m+t+1}}} \quad \text{a.s.}$$

를 각 $t \leq T$ 마다 알려 준다. 이를 Claim 7.1 및 Claim 7.2와 엮으면, 확률 K' 이하인 사건을 제외하고서는

$$\limsup_n \frac{1}{\alpha(n)} \left| \sum_{2^{m+t} \leq n} \left[\bar{b}_{t,2 \lfloor n/2^{m+t+1} \rfloor + 1; n} + \sum_{i=1}^{\lfloor n/2^{m+t+1} \rfloor} \bar{b}_{t,2i-1} \right] \right| \leq K' + \frac{20K}{\sqrt{2^m}}$$

가 성립함을 알 수 있다. $K' \rightarrow 0$ 로 보내면 이는 거의 모든 곳에서의 부등식으로 진화한다. 마지막으로, 고전적인 중첩 로그 정리는

$$\limsup_n \pm \frac{1}{\alpha(n)} \sum_{i=1}^{\lfloor n/2^m \rfloor} \bar{Y}_{0,i} = \sigma_m \quad \text{a.s.}$$

임을 알려 준다. 거의 모든 곳에서 $\frac{1}{\alpha(n)}\bar{Y}_{0, [n/2^m]+1; n} \rightarrow 0$ 라는 사실과 함께 생각하면,

$$\limsup_n \pm \frac{1}{\alpha(n)} [d(o, \omega_n o) - \mathbb{E}[d(o, \omega_n o)]] \in \left[\sigma_m - \frac{20K}{\sqrt{2^m}}, \sigma_m + \frac{20K}{\sqrt{2^m}} \right] \quad \text{a.s.}$$

임을 알 수 있다. $m \rightarrow \infty$ 일 때 $\sigma_m \rightarrow \sigma$ 이므로 원하던 결론을 얻는다.

8. 논의할 점 및 추후 방향

우리 전략에서의 핵심 요소는 Schottky 집합 및 중추들을 구성하는 작업이었다. 더불어, 궁극적인 중추들은 그 위치/방향이 랜덤 워크의 영구적인 항방을 결정하게끔 추려졌다. 이러한 현상을 (Weil-Petersson 계량을 얻은 Teichmüller space를 포함하여) CAT(0)-공간들 혹은 상대적인 쌍곡군들의 Cayley 그래프 등 다른 세팅으로 옮길 수 있다면 흥미로울 것이다.

이 결과를 일반화시킬 수 있는 또다른 접근법은 군이 한 공간에 작용하는 방식을 다른 공간에 작용하는 방식으로 옮겨내는 것이다. 예를 들어 사상류군은 곡선 콤플렉스(*curve complex*)에도, Teichmüller 공간에도 작용할 수 있다. 따라서, 한 공간에서의 동역학이 상대편 공간에서의 동역학에 대한 정보를 줄 수도 있다. 이러한 철학은 [Hor18], [DH18] 및 [MS20]에서도 활용되어 유용한 결과들을 낳았다. 저자는 이러한 전략이 Weil-Petersson 기하학에서의 중심극한정리 및 그 역을 이끌어내기를 바란다.

또한 랜덤 워크에 대한 더 상세한 기술 — local limit theorem, large deviation principles 등 — 을 목표로 삼을 수도 있다. 이에 관해서는 Boulanger, Mathieu, Sert 및 Sisto가 최근에 발표한, Gromov 쌍곡 공간에서의 변위 및 이동 거리에 대한 large deviation principles를 정립한 [BMSS20]를 언급해야 할 것이다. 본 논문에서 사용된 기법들과 large deviation principles 간의 연관성은 차후 계속 연구되어야 할 것이다.

REFERENCES

- [Aou20] Richard Aoun. Central limit theorem for eigenvalues. *arXiv preprint arXiv:1902.09202*, 2020.
- [BCK21] Hyungryul Baik, Inhyeok Choi, and Dongryul M Kim. Linear growth of translation lengths of random isometries on Gromov hyperbolic spaces and Teichmüller spaces. *arXiv preprint arXiv:2103.13616*, 2021.
- [BH13] Martin R Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319. Springer Science & Business Media, 2013.
- [BHM11] Sébastien Blachère, Peter Haïssinsky, and Pierre Mathieu. Harmonic measures versus quasiconformal measures for hyperbolic groups. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 44(4):683–721, 2011.

- [BMSS20] Adrien Boulanger, Pierre Mathieu, Çağrı Sert, and Alessandro Sisto. Large deviations for random walks on hyperbolic spaces. *arXiv preprint arXiv:2008.02709*, 2020.
- [BQ16] Yves Benoist and Jean-François Quint. Central limit theorem on hyperbolic groups. *Izvestiya: Mathematics*, 80(1):3, 2016.
- [Cho21] Inhyeok Choi. Central limit theorem and geodesic tracking on hyperbolic spaces and Teichmüller spaces. *arXiv preprint arXiv:2106.13017*, 2021.
- [dA83] Alejandro de Acosta. A new proof of the hartman-wintner law of the iterated logarithm. *Annals of Probability*, 11(2):270–276, 1983.
- [DH18] François Dahmani and Camille Horbez. Spectral theorems for random walks on mapping class groups and $\text{Out}(F_N)$. *International Mathematics Research Notices*, 2018(9):2693–2744, 2018.
- [EK74a] Clifford J. Earle and Irwin Kra. On holomorphic mappings between Teichmüller spaces. In *Contributions to Analysis, A collection of Papers dedicated to Lipman Bers*, pages 107–124, 1974.
- [EK74b] Clifford J. Earle and Irwin Kra. On isometries between Teichmüller spaces. *Duke Mathematical Journal*, 41(3):583–591, 1974.
- [FLP79] Albert Fathi, François Laudenbach, and Valentin Poénaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces*, volume 66 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1979. Séminaire Orsay, With an English summary.
- [GdlH90] Etienne Ghys and Pierre de la Harpe. *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Springer Science & Business Media, 1990.
- [Gou21] Sébastien Gouëzel. Exponential bounds for random walks on hyperbolic spaces without moment conditions. *arXiv preprint arXiv:2102.01408*, 2021.
- [GTT19] Ilya Gekhtman, Samuel J. Taylor, and Giulio Tiozzo. A central limit theorem for random closed geodesics: Proof of chas-li-maskit conjecture. *Advances in Mathematics*, 358(106852), 2019.
- [GTT20] Ilya Gekhtman, Samuel J. Taylor, and Giulio Tiozzo. Central limit theorem for counting measures in coarse negative curvature. *arXiv preprint arXiv:2004.13084*, 2020.
- [Gui90] Yves Guivarc’h. Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes du groupe linéaire. *Ergodic theory and dynamical systems*, 10(3):483–512, 1990.
- [Hor18] Camille Horbez. Central limit theorems for mapping class groups and $\text{Out}(F_N)$. *Geometry & Topology*, 11:105–156, 2018.
- [Hub16] John H Hubbard. Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics, 2016.
- [IT12] Yoichi Iwayoshi and Masahiko Taniguchi. *An introduction to Teichmüller spaces*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Kai00] Vadim A. Kaimanovich. The Poisson formula for groups with hyperbolic properties. *Annals of Mathematics*, 152(3):659–692, 2000.

- [Kar14] Anders Karlsson. Two extensions of Thurston's spectral theorem for surface diffeomorphisms. *Bulletin of the London mathematical society*, 46(2):217–226, 2014.
- [Ker80] Steven P. Kerckhoff. The asymptotic geometry of Teichmüller space. *Topology*, 19(1):23–41, 1980.
- [KM96] Vadim A. Kaimanovich and Howard Masur. The Poisson boundary of the mapping class group. *Inventiones mathematicae*, 125(2):221–264, 1996.
- [Led01] François Ledrappier. Some asymptotic properties of random walks on free groups. In *Topics in probability and Lie groups: boundary theory*, volume 28 of *CRM Proceedings and Lecture Notes*, pages 117–152, 2001.
- [Mas92] Howard Masur. Hausdorff dimension of the set of nonergodic foliations of a quadratic differential. *Duke Mathematical Journal*, 66(3):387–442, 1992.
- [MS20] Pierre Mathieu and Alessandro Sisto. Deviation inequalities for random walks. *Duke Mathematical Journal*, 169(5):961–1036, 2020.
- [MT18] Joseph Maher and Giulio Tiozzo. Random walks on weakly hyperbolic groups. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*, 2018(742):187–239, 2018.
- [MW95] Howard A Masur and Michael Wolf. Teichmüller space is not gromov hyperbolic. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Series A I. Mathematica*, 20(2):259–267, 1995.
- [Raf14] Kasra Rafi. Hyperbolicity in Teichmüller space. *Geometry & Topology*, 18(5):3025–3053, 2014.
- [Roy71] Halsey L. Royden. Automorphisms and isometries of Teichmüller spaces. In *Advances in the theory of Riemann surfaces*, volume 66 of *Annals of Mathematics Studies*, pages 369–383, 1971.
- [Sis17] Alessandro Sisto. Tracking rates of random walks. *Israel Journal of Mathematics*, 220:1–28, 2017.
- [Thu88] William P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bulletin (new series) of the American mathematical society*, 19(2):417–431, 1988.
- [Tio15] Giulio Tiozzo. Sublinear deviation with geodesics and sample paths. *Duke Mathematical Journal*, 164(3):511–539, 2015.
- [Väi05] Jussi Väisälä. Gromov hyperbolic spaces. *Expositiones Mathematicæ*, 23:187–231, 2005.